Proposta de Resolução do Exame Nacional de Matemática do 3º Ciclo

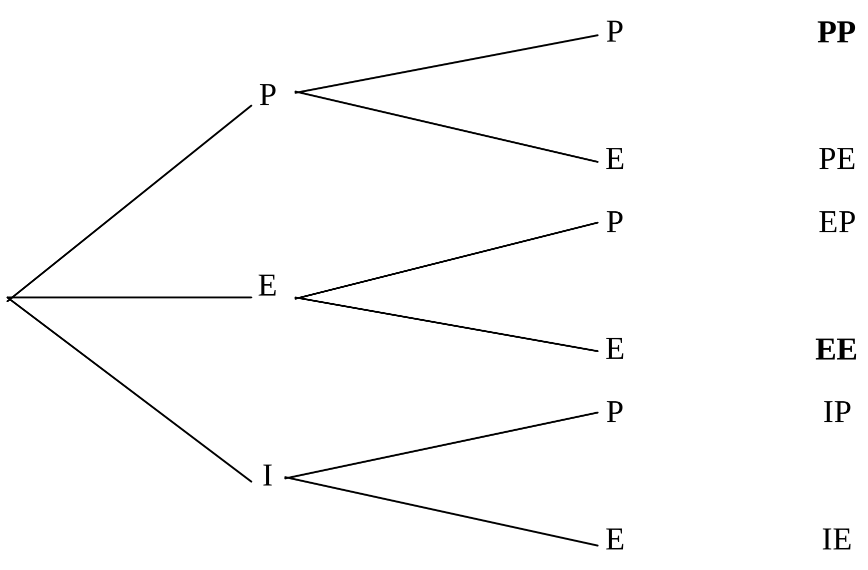
Prova 927, 1ª Chamada 2012

1.

1.1. De acordo com enunciado, 50% são portugueses (P) e 50% são espanhóis (E) e italianos (I). Como os Espanhóis existem em maior número que os Italianos, $25\% < E < 50\%$. Deste modo, a opção correta é 30%.

1.2. Recorrendo a um diagrama em árvore, por exemplo, temos:

1.ª tenda 2.ª tenda



N.º de casos possíveis: 6

N.º de casos favoráveis: 2

$$P(ter\ a\ mesma\ nacionalidade) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

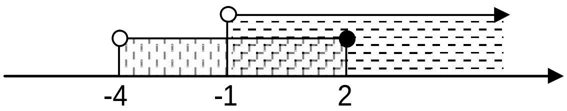
R: A probabilidade dos dois jovens escolhidos terem a mesma nacionalidade é $\frac{1}{3}$.

2. Para que a tome o maior valor, o número em falta, digamos n, terá que ser o menor possível, uma vez que a soma $1 + n + a$ é constante. Sendo n um número natural diferente de 1, poderá ser 2.

Então, $\frac{1+2+a}{3} = 11 \Leftrightarrow 1 + 2 + a = 33 \Leftrightarrow 3 + a = 33 \Leftrightarrow a = 33 - 3 \Leftrightarrow a = 30$

R: O maior valor que a pode tomar é 30.

3.



$A \cap B =]-1{,}2]$

R: O intervalo $]-1{,}2]$ é a opção correta.

4.

Consideremos duas subsequências, uma determinada pelos extremos inferiores do intervalo e outra pelos extremos superiores do mesmo.

Ficamos com:

1 3 6 10 15 21 28 36

2 3 4 5 6 7 8

2 5 9 14 20 27 35 44

3 4 5 6 7 8 9

As diferenças entre os termos em ambos os casos são crescentes. Utilizando a recorrência, obtemos como 8º termo o intervalo $[36; 44]$. Os intervalos são fechados nos termos apresentados, pelo que, continuaremos com esta característica.

Outra proposta de resolução:

Podemos apenas determinar o extremo inferior do intervalo. Para calcular o extremo superior podemos adicionar 8, visto que a diferença entre os extremos do intervalo, ou seja, a amplitude do mesmo, é igual ao número de ordem da sequência.

R: O oitavo termo da sequência é o intervalo $[36; 44]$.

5.

$n^3 = k$

$n^{-3} = \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}$ dado que $n^3 = k$, substituímos na expressão dada e obtemos

$n^{-3} = \frac{1}{k}$

R: $\frac{1}{k}$

6.

$-2x < 4 \Leftrightarrow$

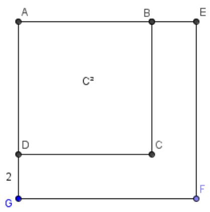
$\Leftrightarrow -x < \frac{4}{2}$

$\Leftrightarrow -x < 2$

$\Leftrightarrow x > -2$

R: $x > -2$

7.



$A_{[ABCD]} = C^2$

$A_{[ABCD]} = (C + 2)^2$

$AG = AD + DG = C + 2$

7.1

$(C + 2)^2 - C^2$ representa a diferença entre a área do quadrado AEFG e a área do quadrado ABCD. No contexto, esta diferença representa a zona relvada da imagem.

R: A expressão representa a área da parte relvada do terreno.

7.2

$FE = FG$ porque $[AEFG]$ é quadrado o $\measuredangle EFG = 90°$ pelo mesmo motivo.

R: Ponto G.

8.

$(x+2)^2 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 2 \times 2x + 2^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - 3x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

Assim, $a = -1; b = 1; c = 2$.

Aplicando a fórmula resolvente:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+3}{-2} \ \vee \ x = \frac{-1-3}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{-2} \ \vee \ x = \frac{-4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 2$$

$C.S. = \{-1; 2\}$

9.

$$\begin{cases} x - \dfrac{y-1}{2} = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{2} - \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{6}{2} \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 6 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - 6 = y \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 3x - (2x - 5) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ 3x - 2x + 5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ x + 5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ x = 6 - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times 1 - 5 = y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$C.S. = \{(1; -3)\}$

10.

$y = \frac{k}{x}$

As variáveis x e y são inversamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é k.

11.

Sendo o gráfico uma representação de uma função de proporcionalidade inversa,

então $y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow xy = k$.

Como $xy = k \Leftrightarrow 8 \times 4 = 32$, donde k = 32.

Assim, para $x = 2$ e k = 32 , vem que

$y = \frac{k}{x} \Leftrightarrow y = \frac{32}{2} \Leftrightarrow y = 16$

R: A ordenada do ponto é 16.

12.

12.1.

Pelos dados do enunciado vem que:

- $\overline{BC} = a$, pois é a medida da aresta do cubo;
- $\overline{BI} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{1}{3}a = \frac{a}{3}$;
- $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 2a$.

Assim,

- $V_{prisma} = A_{base} \times altura = 2a \times a \times \frac{a}{3} = \frac{2a^3}{3}$
- $V_{cubo} = (aresta)^3 = a^3$

Donde

- $V_{total} = V_{prisma} + V_{cubo} \Leftrightarrow 25 = \frac{2a^3}{3} + a^3 \Leftrightarrow \frac{75}{3} = \frac{2a^3}{3} + \frac{3a^3}{3} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 75 = 2a^3 + 3a^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 75 = 5a^3 \Leftrightarrow \frac{75}{5} = a^3 \Leftrightarrow a^3 = 15 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{15}$.

R: A aresta do cubo mede $\sqrt[3]{15}\ cm$.

12.2. IH

13.

13.1. Os triângulos [ADE] e [ABC] são semelhantes, pelo critério de semelhança de triângulos AA :

- $D\hat{A}E = B\hat{A}C$, pois é comum aos dois triângulos;
- $A\widehat{D}E = A\hat{B}E$, pois são ambos ângulos retos;

Os lados correspondentes são:

- [AD] e [AB]
- [AE] e [AC]
- [DE] e [BC]

Assim, basta calcular $\overline{DE}$ para determinar $\overline{BC}$, pois os lados correspondentes são diretamente proporcionais.

Como o triângulo [ADE] é retângulo, usamos o Teorema de Pitágoras:

$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 \Leftrightarrow 25^2 = 20^2 + \overline{DE}^2 \Leftrightarrow 625 = 400 + \overline{DE}^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 625 - 400 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 225 \Leftrightarrow \overline{DE} = \pm\sqrt{225} \Leftrightarrow \overline{DE} = 15$ (positivo, pois é uma medida de comprimento).

Ou

Razão de semelhança entre os triângulos:

$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5}$

Logo,

$\overline{BC} = 15 \times \frac{8}{5} = 24\ cm.$

Regra de 3 simples:

$\Delta\,[\boldsymbol{ADE}]$ $\Delta[\boldsymbol{ABC}]$

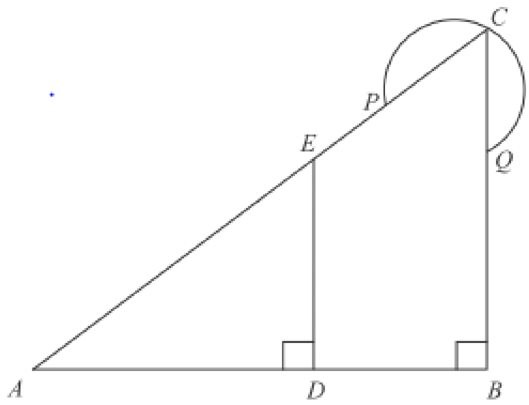
25 ------------ 40

15 ------------- $\overline{BC}$

$\overline{BC} = \frac{15 \times 40}{25} = 24\ cm.$

R: O segmento [BC] mede 24cm.

13.2.



PCQ é um ângulo inscrito à circunferência definida pelos pontos *P*, *C* e *Q*. Assim, conhecendo a amplitude desse ângulo, facilmente obtemos a amplitude do arco *PQ* multiplicando esse valor por 2.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, vem que:

37 + 90 = 127

180 – 127 = 53, logo o ângulo ACB mede 53º

Então o arco *PQ* = 53 × 2 = 106

Como pretendemos a amplitude do arco *PCQ*, temos que subtrair do total (360º) a amplitude do arco *PQ* (106).

Assim temos

360-106 = 254, ou seja, o arco *PCQ* mede 254º de amplitude

R: O arco *PCQ* mede 254º de amplitude.

13.2.

Cateto oposto ao ângulo *ACB*: $\overline{AB}$

Cateto adjacente ao ângulo *ACB*: $\overline{BC}$

Hipotenusa: $\overline{AC}$

Como o $\cos\alpha = \frac{C.adjacente}{hipótenusa}$, então $\cos\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

R: $\cos\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

14. Uma face está pintada e 4 meias faces também. As meias faces pintadas têm de ser adjacentes à face pintada, logo, apenas a planificação **C** garante estas condições.