Proposta de Resolução do Exame Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Cód. 835 - 1ª Fase, 19 de Junho 2012

1.1. Para determinar a candidata escolhida aplicando o método descrito é necessário considerar todos os confrontos possíveis entre duas das três candidatas: Maria e Fernanda, Maria e Luísa; Luísa e Fernanda. Uma vez que já nos é dado o resultado do confronto entre a Maria e a Fernanda resta agora considerar os dois casos restantes:

- escolhem-se as candidatas Maria (M) e Luísa (L), e elabora-se uma nova tabela apenas com estas duas candidatas:

	1500 votos	2100 votos	1000 votos	1500 votos
1ª linha	M	L	L	M
2ª linha	L	M	M	L

  contabilizando apenas a primeira linha, a candidata com maior número de votos é a **Luísa** com 3100 votos contra 3000, logo é a vencedora;

- repetindo o processo para o par de candidatas Luísa (L) e Fernanda (F), a tabela é a seguinte:

	1500 votos	2100 votos	1000 votos	1500 votos
1ª linha	L	L	F	F
2ª linha	F	F	L	L

  contabilizando apenas a primeira linha a candidata com maior número de votos é a **Luísa** com 3600 votos contra 2500, logo é ela a vencedora desta comparação.

Desta forma a candidata Luísa deverá ser a candidata escolhida para a presidência da comissão organizadora por ser a vencedora em todas as comparações das quais faz parte.

1.2. Para proceder ao apuramento do número de convites distribuídos, aplicando o método descrito, registaram-se os cálculos e os valores na tabela seguinte:

Aldeia	A	B	C	D
Número de habitantes	4000	3800	3200	2500
Divisor padrão	$\frac{4000+3800+3200+2500}{360}=\frac{13500}{360}=37{,}5$			
Quota padrão	$\frac{4000}{37{,}5}\approx 106{,}67$	$\frac{3800}{37{,}5}\approx 101{,}33$	$\frac{3200}{37{,}5}\approx 85{,}33$	$\frac{2500}{37{,}5}\approx 66{,}67$
L	106	101	85	66
$\sqrt{L\times(L+1)}$	$\sqrt{106\times 107}\approx 106{,}50$	$\sqrt{101\times 102}\approx 101{,}50$	$\sqrt{85\times 86}\approx 85{,}50$	$\sqrt{66\times 67}\approx 66{,}50$
Quota padrão arredondada	1+106=107	101	85	1+66=67
Soma da quotas padrão arredondadas	107+101+85+67=360			

Como a soma das quotas padrão arredondadas é igual ao número de convites, o método dá-se por finalizado, sendo atribuídos 107 convites à aldeia A, 101 convites à aldeia B, 85 convites à aldeia C e 67 convites à aldeia D.

2. Para averiguar a veracidade da informação, aplicamos o algoritmo nos dois casos:

- A estrada que liga A a B está transitável:

  Passo 1: Vila de Freixo

  Passo 2: Seleciona-se a aldeia A (distância 18 *Km*)

  Passo 3: Selecciona-se a aldeia B (distância 28 *Km*)

  Passo seguinte: Selecciona-se a aldeia D (distância 32 *Km*)

  Passo seguinte: Selecciona-se a aldeia C (distância 48 *Km*)

  Passo seguinte: Regressa-se à vila de Freixo (distância 20 *Km*)

  Total de quilómetros percorridos: 18+28+32+48+20= 146

- A estrada que liga A a B não está transitável:

  Passo 1: Vila de Freixo

  Passo 2: Seleciona-se a aldeia A (distância 18 *Km*)

  Passo 3: Selecciona-se a aldeia D (distância 30 *Km*)

Passo seguinte: Selecciona-se a aldeia B (distância 32 *Km*)

Passo seguinte: Selecciona-se a aldeia C (distância 36 *Km*)

Passo seguinte: Regressa-se à vila de Freixo (distância 20 *Km*)

Total de quilómetros percorridos: 18+30+32+36+20= 136

Assim, o percurso alternativo, utilizado sem recurso à estrada que liga A a B tem uma extensão inferior ao percurso escolhido no caso da estrada que liga A a B estar transitável, pelo que a informação constante no anúncio é **falsa**.

3.1 Para determinar o valor do aumento registado entre o quinto e o sexto mês, calcula-se:

$N(5) = 4{,}8 \times 3^{0{,}15\times 5} \approx 10{,}942$

$N(6) = 4{,}8 \times 3^{0{,}15\times 6} \approx 12{,}902$

Seguidamente, a diferença entre os volumes de vendas registadas:

$$N(6) - N(5) \approx 12{,}902 - 10{,}942 \approx 1{,}96$$

Podemos concluir que as vendas de telemóveis entre o quinto e o sexto mês aumentaram 1,96 milhares.

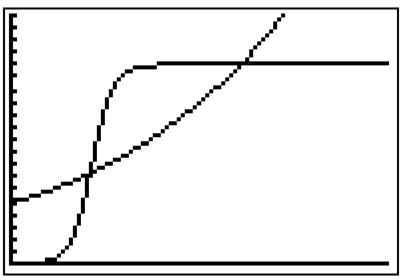
3.2. O modelo sugerido para V(t) é um modelo logístico. Introduzindo nas listas da calculadora os respectivos valores de t (em meses) e de V (em milhares), e realizando uma regressão logística obtém-se os seguintes valores

$$a \approx 2414{,}66$$

$$b \approx 3{,}10$$

$$c \approx 15{,}79$$

3.3. Introduzindo no editor de funções da calculadora as expressões indicadas para N(t) e V(t), obtém-se a seguinte representação gráfica, a partir de uma janela de visualização para valores de *x* entre 0 e 12, ou seja para uma escala temporal dos 12 primeiros meses, e para valores de *y* entre 0 e 20, ou seja para volumes de vendas inferiores a 20 mil unidades.



Pela análise do gráfico pode-se constatar que <u>a afirmação é falsa</u> porque embora seja verdade que o número de telemóveis vendidos é superior ao número de computadores nos dois primeiros meses (por a curva referente a N(t) estar acima da referente a V(t)), a partir do terceiro mês a curva que representa *V(t)* permanece acima da curva que representa *N(t)* apenas por algum tempo (do 3º ao 8º mês aproximadamente), voltando a ser inferior durante o oitavo mês; ou seja, o número de computadores vendidos volta a ser menor que o número de telemóveis vendidos ao fim de alguns meses, tal como acontece nos dois primeiros meses.

4.1 O cálculo da média resulta da multiplicação das idades pelo número de alunos respetivo, dividindo este produto pelo número total de alunos:

$$\frac{14\times 6+15\times 10+16\times 6+p\times 2}{6+10+6+2}=\frac{330+2p}{24}$$

assim, como a média calculada foi de 48,5, temos que:

$$\frac{330+2p}{24}=48{,}5$$

Ou seja, $330+2p=48{,}5\times 24=1164$:

Donde

$$2p=1164-330=834$$

Ou seja

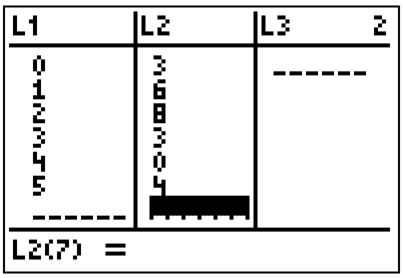
$$p=\frac{834}{2}=417$$

O número que a Maria escreveu, incorretamente, foi 417.

4.2. Insere-se nas listas da calculadora os valores relativos ao gráfico 1 do seguinte modo:

Em L1 o número de irmãos: 0, 1, 2, 3, 4, 5

Em L2: o número de alunos com 0, 1, 2, 3, 4, 5 irmãos respectivamente



Obtendo-se,

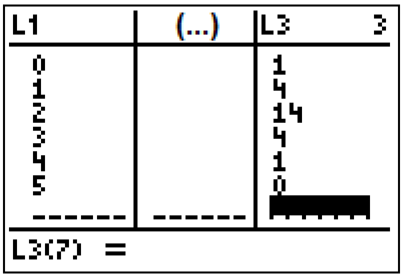
Média = 2,125

Desvio padrão ≈ 1,569

Relativamente aos valores apresentados na tabela 7, define-se na calculadora

Lista L1 - número de irmãos: 0, 1, 2, 3, 4, 5

Lista L3 - número de alunos com 0, 1, 2, 3, 4, 5 irmãos respectivamente



Obtendo-se,

Média = 2

Desvio padrão ≈ 0,834

Uma vez que a variabilidade em relação à média de um conjunto de dados é medido pelo desvio padrão, conclui-se que a amostra apresentada na Tabela 7 tem uma maior variabilidade em relação à média do que a apresentada no gráfico 1, por o desvio padrão ser maior.

4.3 Pela análise dos gráficos das opções II e III é possível estimar os valores médios, correspondendo aos valores com maior frequência, por serem distribuições aproximadamente simétricas. Assim, a média da distribuição da opção II é aproximadamente igual a 10 e a média da distribuição da opção III é aproximadamente igual a 8.

Nas condições do enunciado, a média da escola C terá que ser superior em 2 valores à da escola A, logo a opção II corresponderá à escola C, que tem uma média superior em dois valores à que corresponde à opção III, que representará a escola A.

Analisando os dados do enunciado a média da escola B, será cerca de duas vezes superior à média dos resultados da escola A, ou seja o dobro de 8, aproximadamente, o que é coerente com o gráfico da opção I, pelo que a escola B corresponde à opção I, por ser aproximadamente 16 o valor com maior frequência e a assimetria da curva não ser muito pronunciada.

4.4. Para a determinação do valor de n considera-se:

$z = 1{,}960$

$\sigma = 3$

Se se pretende que a amplitude do intervalo de confiança seja no máximo de 2 valores, isso significa que a margem de erro (dada pela semi-amplitude do intervalo de confiança) terá quer ser inferior ou igual a 1.

Ora a margem de erro é dada pela expressão

$$z \times \frac{\sigma}{n}$$

Neste caso pretende-se que

$$z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1 \Leftrightarrow 1{,}960 \times \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 1$$

Simplificando a expressão,

$$\frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1{,}960} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 3 \times 1{,}960 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 5{,}88$$

Ora, sendo n um número positivo, $\sqrt{n} \geq 5{,}88$ se e só se $n \geq 34{,}5744$

Assim, a dimensão mínima da amostra para que a amplitude seja inferior a 2 terá de ser 35.

5.1. Considerando um quarto dos 23% da produção de centeio podemos calcular a produção que é transacionada no mercado interno (5,75%) e concluir que os restantes (17,25 %) são transacionados no mercado externo:

	Centeio	Milho	Trigo	**Total**
Mercado externo	$23\% - 5{,}75\% = 17{,}25\%$			
Mercado interno	$\frac{23\%}{4\%} = 5{,}75\%$			
Total	23%			100%

O valor de 11 040 sacas de trigo produzidas permite determinar a percentagem da produção de sacas de trigo em relação ao total (12%) e também a percentagem da produção de milho em relação ao total (65%).

	Centeio	Milho	Trigo	**Total**
Mercado externo	$23\% - 5{,}75\% = 17{,}25\%$			
Mercado interno	$\frac{23\%}{4\%} = 5{,}75\%$			
Total	23%	$100\% - 23\% - 12\% = 65\%$	$\frac{11\,040 \times 100}{92\,000} = 12\ \%$	100%

O valor de 11 960 sacas de milho transaccionadas no mercado externo permite agora determinar a percentagem do total das transações relativas a este parâmetro. Também o facto de nos ser dito que 50% dos 12% relativos ao número de sacas de trigo produzidas ser transacionado no mercado interno permite concluir o preenchimento da tabela da seguinte forma:

	Centeio	Milho	Trigo	**Total**
Mercado externo	$23\% - 5{,}75\% = 17{,}25\%$	$\frac{11960 \times 100}{92000} = 13\%$	$50\% \times 12\% = 6\%$	36,25%
Mercado interno	$\frac{23\%}{4\%} = 5{,}75\%$	65%-13% =52%	$50\% \times 12\% = 6\%$	63,75%
Total	23%	$100\% - 23\% - 12\% = 65\%$	$\frac{11\,040 \times 100}{92\,000} = 12\ \%$	100%

5.2. Recorrendo às capacidades da calculadora podemos determinar o valor pedido correspondente a $P\ (968 < X < 1016) \approx 81{,}86\%$,