PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B

DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2014

GRUPO I

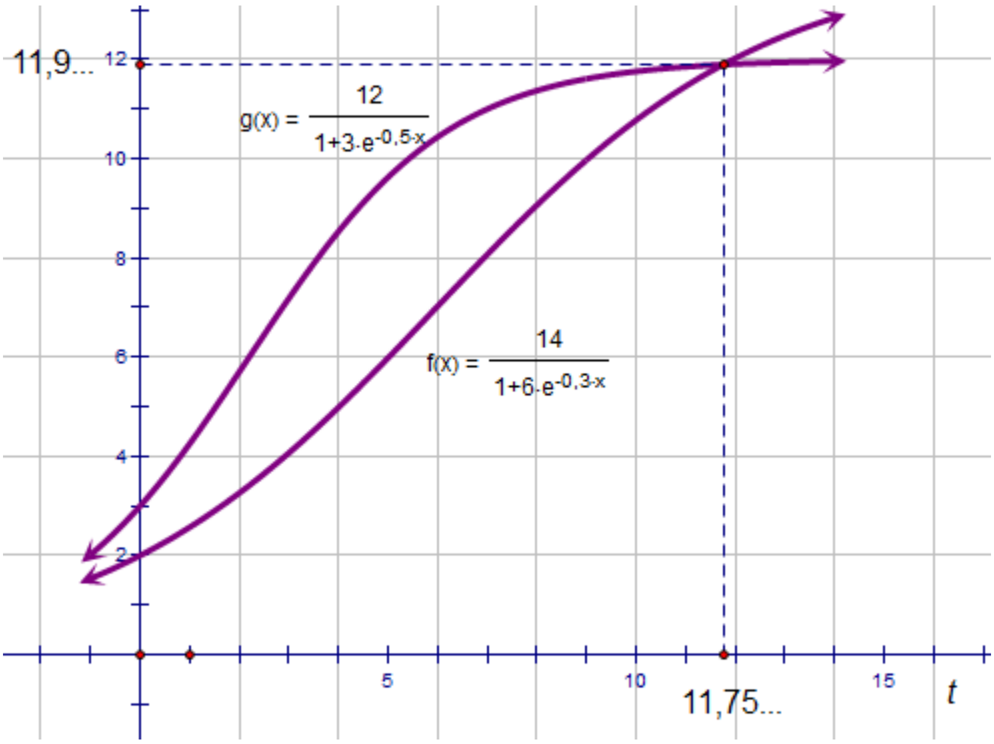
1. O período de pré-venda é o que decorre até ao lançamento, logo termina para $t = 0$.

$$f(0) = \frac{14}{1+6\times e^0} = \frac{14}{7} = 2$$

$$g(0) = \frac{12}{1+3\times e^0} = \frac{12}{4} = 3$$

O álbum mais vendido foi o *álbum G*, que vendeu 3 mil exemplares, enquanto o *álbum F* só vendeu 2 mil.

2.



Decorreram cerca de 12 meses até que o número de exemplares vendidos do *álbum F* excedeu o número de exemplares do *álbum G*.

3. Não, nenhum dos grupos será galardoado com o disco de platina, porque o número de álbuns vendidos tem um crescimento assintótico, em ambos os casos, para valores inferiores a 15. Ou seja, o gráfico do número de álbuns vendidos aproxima-se de uma determinada reta à medida que o número de álbuns vendidos cresce. O gráfico do número de exemplares

vendidos do *álbum F* aproxima-se tanto quanto se quiser de $y = 14$ e o gráfico do número de exemplares vendidos do *álbum F* aproxima-se de $y = 12$.
Assim, o número de exemplares do *álbum F* tende para 14 mil e o número de exemplares do *álbum G* tende para 12 mil.

GRUPO II

1.1. De acordo com os dados do problema, em cada dia a profundidade acrescentada ao poço, em metros, foi 95% da profundidade acrescentada no dia anterior, isto é: $p_{n+1} = 0{,}95 \times p_n$
Logo, (p_n) é uma progressão geométrica de primeiro termo 30 e razão 0,95.
Então $p_{10} = 30 \times 0{,}95^9 = 18{,}907...$
No 10º dia foram acrescentados 18,9 metros à profundidade do poço.

1.2. A profundidade atingida no dia n é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica, isto é:

$$S_n = 30 \times \frac{1 - 0{,}95^n}{1 - 0{,}95}$$
$$S_n = \frac{30 \times (1 - 0{,}95^n)}{0{,}05}$$
$$S_n = 600\,(1 - 0{,}95^n)$$

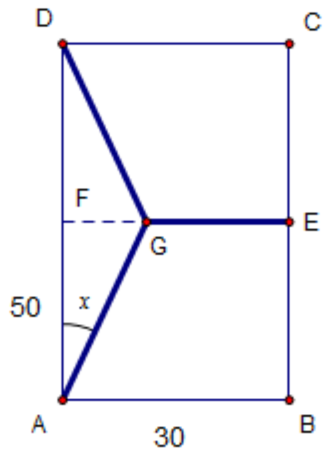
Então, para que esta ultrapasse 575 metros

$$600\,(1 - 0{,}95^n) > 575$$

Esta inequação pode resolver-se com recurso à calculadora gráfica, introduzindo as funções $Y_1 = 600\,(1 - 0{,}95^n)$ e $Y_2 = 575$, e calculando a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos: $X = 61{,}958$ ...
Para que a profundidade do poço ultrapasse 575 metros são necessários 62 dias de trabalho.

2. Como a empresa produz apenas mais um estilo de cadeiras, y representa o número de cadeiras de estilo D. Maria I produzidas mensalmente pela empresa.
Na secção de marcenaria, que dispõe de 720 horas mensais, a inequação
$6x + 4y \leq 72 \quad \Leftrightarrow \quad 60x + 40y \leq 720$ informa-nos que são gastas 60 horas por cada cadeira do estilo D. José. Do mesmo modo as inequações
$2x + 2y \leq 32 \quad \Leftrightarrow \quad 20x + 20y \leq 320$
$4x + 2y \leq 44 \quad \Leftrightarrow \quad 40x + 20y \leq 440$
indicam-nos que cada cadeira de estilo D. José utiliza 20 horas na secção de revestimento e 40 horas na secção de acabamento.
O lucro é dado por $L = 300x + k\,y$, em que k representa o lucro obtido com cada cadeira de estilo D. Maria I. Como sabemos que o lucro máximo é 3600, para a solução (8, 6), tem-se
$3600 = 300 \times 8 + k \times 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6k = 1200 \quad \Leftrightarrow \quad k = 200$
Então, a expressão da função objetivo é $L = 300x + 200y$.

GRUPO III



1. O comprimento da rede é dado por

$$R = \overline{AG} + \overline{DG} + \overline{EG}$$

Como $\overline{AG} = \overline{DG}$ e $\overline{EG} = 30 - \overline{FG}$, tem-se

$$R = 2\,\overline{AG} + 30 - \overline{FG}$$

Mas, atendendo ao triângulo retângulo *AFG*,

$$\cos x = \frac{50}{\overline{AG}} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{50}{\cos x}$$

e

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{FG}}{50} \Leftrightarrow \overline{FG} = 50 \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \overline{FG} = 50 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Então,

$$\mathrm{R}(x) = 2\times\frac{50}{\cos x} + 30 - 50 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\mathrm{R}(x) = 30 + \frac{100 - 50\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

2. Se $\cos x = \frac{12}{13}$, então $\operatorname{sen}^2 x + \frac{144}{169} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{25}{169} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$.

Substituindo na fórmula da alínea anterior, fica

$\mathrm{R}(x) = 30 + \frac{100-50\times\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \Leftrightarrow \mathrm{R}(x) = 117{,}5$

3. R(25) é a quantidade de rede necessária, em metros, quando x mede 25°.
R(15) é a quantidade de rede necessária, em metros, quando x mede 15°.
A expressão dada é a taxa média de variação entre estas duas situações. Logo, quer dizer que quando se aumenta o ângulo de 15° para 25°, a quantidade de rede necessária decresce, em média, cerca de 0,3 metros por cada grau.

4. Se a taxa de variação instantânea é negativa em todo o domínio, significa que a função R é decrescente em todo o domínio, e por isso a menor quantidade de rede necessária verifica-se para $x = 25$.

GRUPO IV

1. A probabilidade de um dos alunos, escolhido ao acaso, ser rapaz é de:

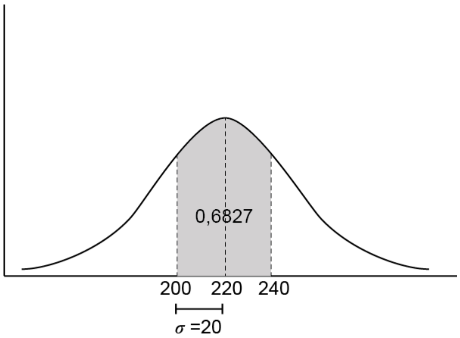
$$p(\text{ser rapaz}) = \frac{10+a}{38+a}$$

Então

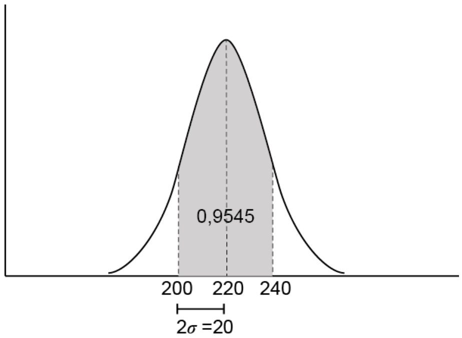
$$\frac{10+a}{38+a} = \frac{6}{13}$$
$$(10+a)\times 13 = 6\times(38+a)$$
$$7a = 98$$
$$a = 14$$

2. A variável Y tem menor desvio-padrão, porque a distribuição está mais concentrada junto à média.

Variável X



Variável Y



3.1. $\overline{OA} = 4\times3 = 12$

Então $A(0, 12)$ e $B(16, 0)$.

A reta AB tem ordenada na origem 12 e declive $-\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$.

A equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{3}{4}x + 12$.

3.2. Dos dados da figura, podemos concluir que $\overline{CE} = r - s$ e $\overline{CD} = r + s$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo CED tem-se:

$$\overline{ED}^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2$$
$$\overline{ED}^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2$$
$$\overline{ED}^2 = r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + 2rs - s^2$$
$$\overline{ED}^2 = 4rs$$

Como rs=9

$$\overline{ED}^2 = 36$$

$\overline{ED} = 6$