PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2014

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	C	A	B	C
Versão 2	B	C	C	A	B	A	D	D

Grupo II

1.

1.1. O complexo z, na forma algébrica, é dado por :

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

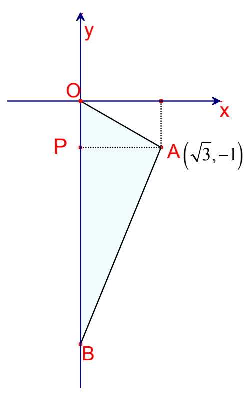
e o seu conjugado $\bar{z} = \sqrt{3} - i$.

A imagem geométrica do complexo $\bar{z}$ é o ponto A de coordenadas $\left(\sqrt{3}, -1\right)$.

Substituindo z na expressão de w e simplificando vem:

$$w = \frac{\left(\sqrt{3} + i - i\right)^4}{1 + i\left(\sqrt{3} + i\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^4}{1 + \sqrt{3}i - 1} = \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times (-i)}{\sqrt{3}i \times (-i)} = \frac{-9i}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}i$$

Então, a imagem geométrica do complexo w é o ponto B de coordenadas $\left(0, -3\sqrt{3}\right)$.



Na figura, está representado o triângulo $[AOB]$, sendo $[AP]$ a sua altura relativamente à base $[OB]$.

Assim, a área do triângulo $[AOB]$ é dada por:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\left|-3\sqrt{3}\right| \times \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

1.2. A equação dada é uma equação do 2º grau em $z \in \mathbb{C}$.

Aplicando a fórmula resolvente vem:

$$z^2 - 2cos\alpha z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2cos\alpha \pm \sqrt{4cos^2\alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2cos\alpha \pm 2\sqrt{cos^2\alpha - 1}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2\left(cos\alpha \pm \sqrt{cos^2\alpha - 1}\right)}{2} \Leftrightarrow z = cos\alpha \pm \sqrt{cos^2\alpha - 1} \Leftrightarrow z = cos\alpha \pm \sqrt{-sen^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = cos\alpha \pm \sqrt{i^2 \times sen^2\alpha} \Leftrightarrow z = cos\alpha \pm isen\alpha \Leftrightarrow z = cos\alpha + isen\alpha \vee z = cos\alpha - isen\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = cis\alpha \vee z = cos(-\alpha) + isen(-\alpha) \Leftrightarrow z = cis\alpha \vee z = cis(-\alpha)$$

As soluções da equação, em função de α, são: $z = cis\alpha$ e $z = cis(-\alpha)$.

2.

2.1. Dado o acontecimento B : *"As duas bolas azuis ficam uma ao lado da outra"* determinemos a probabilidade de B, $P(B)$.

Atendendo a que a extração das bolas é sucessiva e sem reposição, o número de casos possíveis é dado por 6!.

Casos favoráveis à ocorrência de B : se considerarmos que as duas bolas azuis constituem um bloco, existem 5! modos diferentes de permutar esse bloco das bolas azuis com as restantes 4 bolas pretas. Para cada uma dessas maneiras existem 2! formas diferentes das bolas azuis permutarem entre si. Assim, existem $5! \times 2!$ casos favoráveis.

Então, $P(B) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Conclui-se então que a probabilidade pedida é $\frac{1}{3}$.

2.2.

Do enunciado retiramos que os valores da variável X são: 0, 1 e 2.

Determinemos a probabilidade de cada um dos valores da variável:

$$P(X = 0) = \frac{C_3^4}{C_3^6} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = 1) = \frac{2 \times C_2^4}{C_3^6} = \frac{3}{5}$$

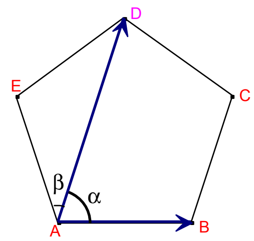
$$P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_1^4}{C_3^6} = \frac{1}{5}$$

Assim, a tabela da distribuição de probabilidade da variável X é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

3. Designemos por α a amplitude do ângulo dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Pela definição de produto escalar de dois vetores tem-se:



$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \cos\alpha}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \cos\alpha \quad (*)$$

Determinemos o valor de α:

A medida da amplitude, em radianos, de cada ângulo interno de um polígono regular é dada por $\frac{(n-2)\pi}{n}$, sendo n o número de lados do polígono. Fazendo n=5 obtemos a medida da amplitude de cada um dos ângulos internos do pentágono regular, ou seja, $\frac{3}{5}\pi$.

Como o triângulo [AED] é isósceles e num triângulo isósceles a lados iguais opõem-se ângulos iguais, tem-se: $\pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta$, sendo $\beta = D\hat{A}E = A\hat{D}E$.

Assim, $\pi = \frac{3\pi}{5} + 2\beta \Leftrightarrow \pi - \frac{3\pi}{5} = 2\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{5}$

Ora, $\alpha + \beta = \frac{3}{5}\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{5}\pi - \beta \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{5}\pi - \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{5}\pi$

Substituindo em (*) o valor de α e aplicando a fórmula de duplicação do co-seno de um ângulo e a fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\frac{\pi}{5} - sen^2\frac{\pi}{5} = 1 - sen^2\frac{\pi}{5} - sen^2\frac{\pi}{5} = 1 - 2sen^2\frac{\pi}{5}$$

Conclui-se assim que $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = 1 - 2sen^2\frac{\pi}{5}$

4.

4.1.

<u>**Assíntotas verticais**</u>

Como a função f é contínua no seu domínio, apenas a reta de equação x=0 poderá ser assíntota vertical do gráfico de f.

Tem-se:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right) = 0 - 1 + (-\infty) \times \frac{1}{0^-} = -1 + (-\infty) \times (-\infty) = +\infty.$$

Conclui-se assim que a reta de equação x=0 é a única assíntota vertical do gráfico de f.

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+\frac{\ln(-x)}{x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\frac{\ln(-x)}{x}\right)=$$

$$=1-0+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln(-x)}{x}\right)=1+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln(-x)}{x}\right)\quad (**)$$

Façamos a mudança de variável: $y=-x \Leftrightarrow x=-y$.

Como $x\to-\infty$ então $y\to+\infty$ e assim,

$$(**)\quad 1-0+\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln(-x)}{x}\right)=1+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{-y}\times\frac{\ln y}{-y}\right)=1+0\times0=1$$

Então, $m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{\ln(-x)}{x}-x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right]=$$

$$\overset{(a)}{=}-1+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{-y}\right)=-1-0\ =-1$$

(a) Mudança de variável: $-x=y$. Como $x\to-\infty$ então, $y\to+\infty$.

Então, $b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=-1$

Portanto a reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de *f* quando x tende para $-\infty$. Não pode haver outras assíntotas não verticais porque o domínio de *f* é limitado superiormente.

O gráfico de *f* admite como assíntotas as retas de equações $x=0$ e $y=x-1$.

Outra resolução:

Temos que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right)$$

Façamos a mudança de variável: $y=-x \Leftrightarrow x=-y$. Como $x\to-\infty$ então $y\to+\infty$ e assim,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{-y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\right)=0$$

Então, por definição de assíntota, a reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de *f* quando x tende para $-\infty$.

4.2. A função *f* é contínua no seu domínio $]-\infty, 0[$, por ser a soma de duas funções contínuas, logo *f* é contínua em $[-e, -1] \subset]-\infty, 0[$.

$f(-e) = -e - 1 + \frac{\ln e}{-e} = -e - 1 - \frac{1}{e}$, sendo $f(-e) \approx -4{,}086$

$f(-1) = -1 - 1 + \frac{\ln 1}{-1} = -2$

Ora, $f(-e) < -e < f(-1)$.

Como *f* é contínua em $[-e, -1]$ e $f(-e) < -e < f(-1)$, o Teorema de Bolzano permite concluir que a equação $f(x) = -e$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-e, -1[$.

4.3. A função *g* tem domínio $]-\infty, 0[$ e é definida pela expressão analítica $g(x) = -1 + \frac{\ln(-x)}{x}$, pois $g(x) = -x + f(x) = -x + x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} = -1 + \frac{\ln(-x)}{x}$.

Para estudar a função *g* quanto à monotonia e existência de extremos, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de *g*.

$$g'(x) = (-1)' + \frac{[\ln(-x)]' \times x - x' \times \ln(-x)}{x^2} = \frac{\frac{-1}{-x} \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2}, \quad D_{g'} =]-\infty, 0[$$

Zeros de *g*’:

$$g'(x) = 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \ln(-x) = 1 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x = e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x = -e$$

Sinal de *g*’:

$$g'(x) > 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} > 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) > 0 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln(-x) < 1 \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow \ln(-x) < \ln e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow -x < e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > -e \wedge x \in D_{g'} \Leftrightarrow x \in]-e, 0[$$

Tabela

x	$-\infty$	$-e$		0
g'	$-$	0	$+$	n.d.
g	$\searrow$	$g(-e)$	$\nearrow$	n.d.

Por observação da tabela, conclui-se que a função g é estritamente crescente em $[-e,0[$ e estritamente decrescente em $]-\infty,-e]$.

A função g tem um mínimo relativo para $x=-e$ que é $g(-e)$.

5. Comecemos por observar que $[PQR]$ e $[PSR]$ são triângulos retângulos em Q e S, respetivamente, pois são triângulos inscritos numa semicircunferência.

Como o lado $[PR]$, comum a ambos, é um diâmetro e $\overline{PQ}=\overline{PS}$ os triângulos retângulos $[PQR]$ e $[PSR]$são geometricamente iguais e têm $[PR]$por hipotenusa.

Então, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada por:

$$A_{[PQRS]}=2\times A_{[PQR]}=2\times\frac{\overline{PQ}\times\overline{QR}}{2}=\overline{PQ}\times\overline{QR}$$

Tem-se, assim:

$$cos(\alpha)=\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}\Leftrightarrow cos(\alpha)=\frac{\overline{PQ}}{4}\Leftrightarrow\overline{PQ}=4\,cos(\alpha)$$

e $sen(\alpha)=\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}}\Leftrightarrow sen(\alpha)=\dfrac{\overline{QR}}{4}\Leftrightarrow\overline{QR}=4\,sen(\alpha)$.

Portanto, a área do quadrilátero $[PQRS]$ é dada, em função de α, por:

$A(\alpha)=4\,cos(\alpha)\times4\,sen(\alpha)=16\,sen(\alpha)cos(\alpha)$.

Então, $A(\theta)=16\,sen(\theta)cos(\theta)$.

Determinemos agora o valor exato de $A(\theta)$.

Como $1+tg^2\theta=\dfrac{1}{cos^2\theta}$ e $tg\,\theta=2\sqrt{2}$ tem-se:

$$1+\left(2\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow1+8=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{9}.$$

Como $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos\theta>0$ e consequentemente $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$.

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria podemos então escrever:

$$sen^2\theta+\frac{1}{9}=1\Leftrightarrow sen^2\theta=1-\frac{1}{9}\Leftrightarrow sen^2\theta=\frac{8}{9}\ .$$

Como $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $sen\,\theta>0$ e consequentemente $sen\,\theta=\dfrac{\sqrt{8}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo o valor exato de $A(\theta)$ é: $A(\theta)=16\,sen(\theta)cos(\theta)=16\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{32\sqrt{2}}{9}$.

6. Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos *A* e *B*.

A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas, pelo que as suas coordenadas são $(0, f(0))$.

Tem-se: $f(0) = -e^0 + 0^2 + 8 = -1 + 8 = 7$. Assim, o ponto *A* tem coordenadas $(0,7)$.

Designando por x a abcissa do ponto *B*, as suas coordenadas são $(x, f(x))$, ou seja, o ponto *B* tem coordenadas $\left(x,\ -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8\right)$.

Assim, o declive da reta *AB* é dado, em função de x, por $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x}$.

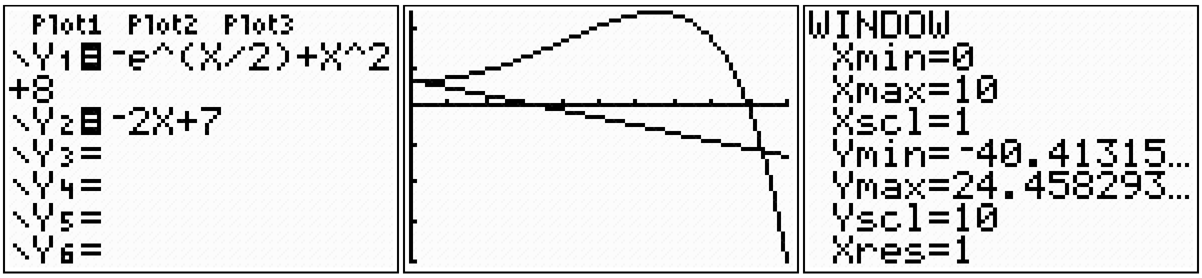
Como a reta *AB* tem declive -2 a abcissa do ponto *B* é a solução da equação

$\dfrac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2$, no intervalo $]0,10]$.

Como $x > 0$ tem-se:

$$\frac{-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7}{x} = -2 \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 - 7 = -2x \Leftrightarrow -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$$

Com o objetivo de resolver a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, com recurso à calculadora gráfica, obteve-se o gráfico da função f definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$ e a reta de equação $y = -2x + 7$ (reta *AB*).



O valor de x que verifica a equação $-e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8 = -2x + 7$, no intervalo $]0,10]$, é aproximadamente 9,35.

A abcissa do ponto *B* é então $x \approx 9{,}35$.

7.

Afirmações:

I) A função *h* tem dois extremos relativos.

Determinemos os zeros de h', primeira derivada da função h.

Como o domínio de h' é $\mathbb{R}$ tem-se:

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^{2x}}=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$.

Estudemos o sinal de h'.

Como $e^{2x}>0,\ \forall x\in \mathbb{R}$ o sinal de h' só depende do sinal da função *f*.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
h'	$+$	0	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	$h(-2)$	$\nearrow$	$h(3)$	$\searrow$

Por observação do quadro concluímos que a função *h* é estritamente crescente em $]-\infty,3]$ e estritamente decrescente em $[3,+\infty[$, pelo que $h(3)$ é o único extremo relativo de h.

Assim, a primeira afirmação é falsa.

II) $h''(-2)=0$

Para calcular $h''(-2)$ determinemos a expressão analítica da segunda derivada de *h*.

$$h''(x)=\left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)'=\frac{f'(x)\times e^{2x}-f(x)\times\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{f'(x)\times e^{2x}-f(x)\times(2x)'\times e^{2x}}{e^{4x}}=$$

$$=\frac{f'(x)\times e^{2x}-f(x)\times 2e^{2x}}{e^{4x}}=\frac{e^{2x}\left(f'(x)-2f(x)\right)}{e^{4x}}=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$$

Então,

$$h''(-2)=\frac{f'(-2)-2f(-2)}{e^{-4}}.$$

Como a função *f* é derivável em $\mathbb{R}$ e tem um extremo relativo em $x=-2$ então $f'(-2)=0$.

Tem-se que $f(-2)=0$ pois -2 é um zero de f.

Portanto, $h''(-2)=\dfrac{f'(-2)-2f(-2)}{e^{-4}}=\dfrac{0-2\times 0}{e^{-4}}=0$.

Assim, a segunda afirmação é verdadeira.

III) $y+3=0$ **é uma equação da assíntota do gráfico da função *h* quando *x* tende para** $+\infty$

Dado que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=3$ concluímos que $y=3$ é uma equação da assíntota do gráfico da função *h* quando *x* tende para $+\infty$, isto é, a reta de equação $y-3=0$ é assíntota do gráfico da função *h* quando *x* tende para $+\infty$.

Assim, a terceira afirmação é falsa.