PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2015

GRUPO I

1. A função objetivo é o lucro e é dada por $L(x, y) = 30x + 50y$.

Restrições:

$x \geq 0$

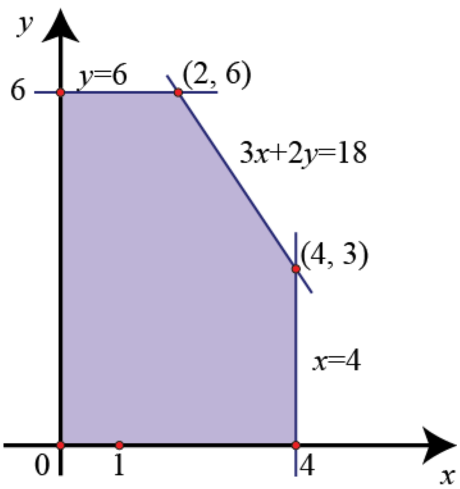
$y \geq 0$

$x \leq 4$

$y \leq 6$

$3x + 2y \leq 18$

Representação gráfica:



x	y	$L(x, y) = 30x + 50y$
0	6	300
2	**6**	**360**
4	3	270
4	0	120

O lucro máximo, de 360 euros, será obtido para $x = 2$ e $y = 6$, isto é, com um investimento de 2 mil euros no produto *X-fin* e de 6 mil euros no produto *Y-fin*.

2. Considerando n o número de meses que passou depois do início da poupança:

Na primeira hipótese:

n.º meses	0	1	2	3	...	n
coloca no mealheiro	2	3	4	5	...	$n+2$
poupança	2	5	9	14	...	

Para $n \geq 1$, a quantia que o Dinis coloca no mealheiro está em progressão aritmética com primeiro termo 3 e razão 1. Ao fim de n meses, a poupança é $2 + Sn$ em que Sn é a soma dos n primeiros termos dessa progressão aritmética:

$$Sn = \frac{3+n+2}{2} \times n$$

$$Sn = \frac{5n+n^2}{2}$$

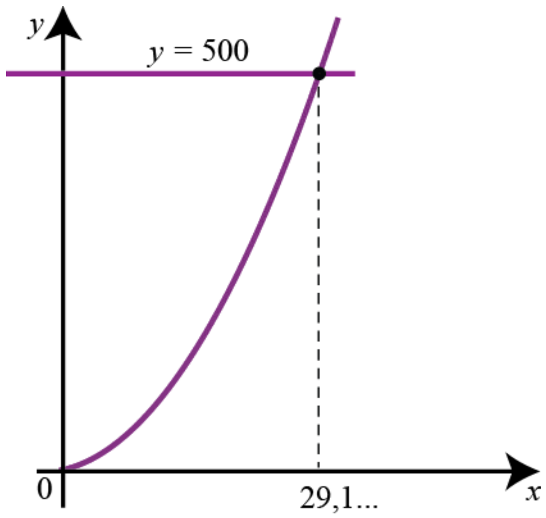
Então, ao fim n meses a poupança é de

$$2 + \frac{5n+n^2}{2}$$

Para ver quando é que atinge os 500 euros, determinamos a interseção dos gráficos das seguintes funções na calculadora gráfica:

$$y1 = 2 + \frac{5x+x^2}{2}$$

$$y2 = 500$$



Podemos concluir que ao fim de 30 meses a poupança teria ultrapassado os 500 euros.

Na segunda hipótese:

n.º meses	0	1	2	3	...	n
coloca no mealheiro	15	15	15	15	...	15
poupança	15	30	45	60	...	$15(n+1)$

A poupança ao fim de n meses é de $15n + 15$ euros.

$$15n + 15 \geq 500$$

$$15n \geq 485$$

$$n \geq 32{,}333....$$

Na segunda hipótese a poupança só atingiria os 500 euros no 33º mês, pelo que é a primeira hipótese que permite juntar mais rapidamente os 500 euros.

3. Designando por c o capital inicial,

ao fim de um ano o capital seria $100\% + 1{,}50\% = 101{,}5\%$ do capital inicial. Assim

ao fim de um ano $c \times 1{,}015$

ao fim de dois anos $c \times 1{,}015 \times 1{,}015 = c \times 1{,}015^2$

(...) ao fim de seis anos $c \times 1{,}015^6$

Então $c \times 1{,}015^6 = 1530{,}82$

$$c = \frac{1530{,}82}{1{,}015^6} \approx 1400$$

O Dinis recebeu 1400 euros quando completou o ensino secundário.

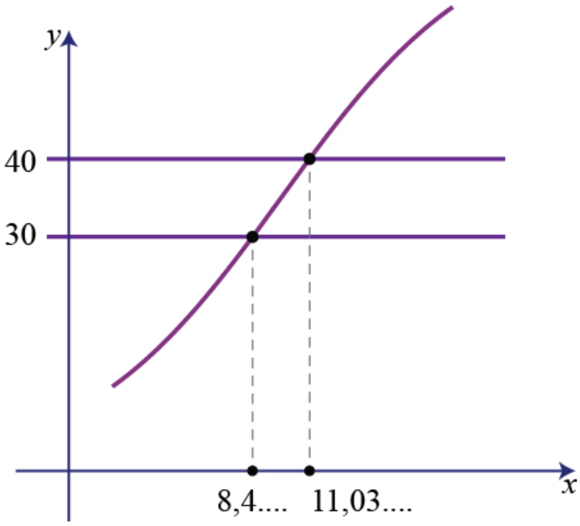
GRUPO II

1.1. Introduzindo na calculadora gráfica as funções

$$y1 = \frac{70}{1 + 8{,}5\, e^{-0.22x}}$$

$$y2 = 30 \quad \text{e} \quad y3 = 40$$

obtemos o seguinte gráfico



Os pontos de interseção assinalados nos gráficos informam-nos que a Laura atingiu 30 kg aos 8,4199 anos, e atingiu os 40 kg aos 11,0352 anos.

$$11{,}0352 - 8{,}4199 = 2{,}6153 \text{ anos}$$

$$0{,}6153 \times 12 = 7{,}3836 \text{ meses}$$

O peso da Laura esteve entre 30 e 40 quilogramas durante cerca de 2 anos e 7 meses.

1.2. No dia 1 de junho de 2012 a Laura fez 14 anos (2012–1998). Nesse dia, o peso da Laura é dado por

$$P(14) \approx 50{,}336 \text{ kg}$$

De acordo com o modelo, a altura da Laura era de 160 cm, ou seja 1,600 m.
Portanto,

$$IMC \approx \frac{50{,}336}{1{,}600^2} \approx 19{,}662$$

O IMC da Laura no dia 1 de junho de 2012 era aproximadamente 19,7.

2. Introduzindo a tabela dada na calculadora gráfica, respetivamente a idade em L1 e a altura em L2, obtém-se

$Ln\ Reg\ y = a + b\ ln\ x$ em que $a \approx -140{,}125$ e $b \approx 58{,}744$

No dia 1 de dezembro de 2014 o André tinha 16 anos e 6 meses, ou seja 198 meses:

$$16 \times 12 + 6 = 198$$

A altura do André é dada por

$$y \approx -140{,}125 + 58{,}744 \times \ln 198$$

$$y \approx 170{,}5$$

A altura do André no dia 1 de dezembro de 2014 é de cerca de 170,5 cm.

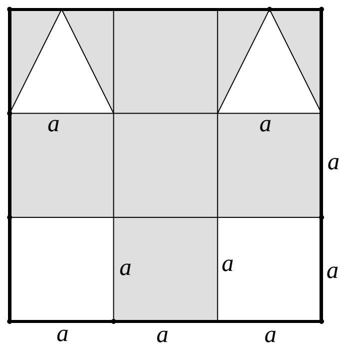
GRUPO III

1. No conjunto I todos os polígonos estão sombreados, por isso o acontecimento "o polígono escolhido está sombreado" é o acontecimento certo, o que contraria a segunda afirmação do professor.
No conjunto III há três triângulos e um quadrado, pelo que a probabilidade de escolher um triângulo é 3/4 e a de escolher um quadrado é 1/4, o que contraria a primeira afirmação do professor.
No conjunto IV há dois quadrados sombreados e nenhum triângulo sombreado, por isso a probabilidade de escolher um quadrado de entre os polígonos sombreados é 1 e não 1/2 como afirmou o professor (3ª afirmação).

2.1. Seja $\overline{OA} = a$.

De acordo com os dados do problema, o quadrado $[OPQR]$ pode ser dividido em 9 quadrados iguais de lado a e área a^2.

Cada um dos triângulos isósceles tem de área metade do quadrado em que está inscrito, logo $\frac{a^2}{2}$, e portanto, a parte do quadrado que está sombreada também tem a mesma área $\frac{a^2}{2}$.



Assim:

A área não sombreada é formada por 2 quadrados e dois triângulos:

$$\text{Área não sombreada} = 2a^2 + 2 \times \frac{a^2}{2} = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

A área sombreada é formada por 5 quadrados e duas metades de quadrado:

$$\text{Área sombreada} = 5a^2 + 2 \times \frac{a^2}{2} = 5a^2 + a^2 = 6a^2$$

A área da região sombreada é, portanto, o dobro da área da região não sombreada.

2.2.1. A reta OQ é a bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) que contém uma diagonal do quadrado $[OPQR]$. O simétrico do ponto P de coordenadas $(3, 0)$ é o outro vértice do quadrado, o ponto R de coordenadas $(0, 3)$.

2.2.2. Se $\overline{OP} = 3$, $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BP} = \overline{PC} = 1$.

Então $B\,(2, 0)$ e $C\,(3, 1)$.

A reta BC é paralela à bissetriz $y = x$, por isso tem declive 1 e equação do tipo $y = x + b$.

Como passa por $B\,(2, 0)$,

$$0 = 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -2$$

Portanto a equação da reta BC é $y = x - 2$

3. 70 minutos é a mediana da distribuição. Tendo em conta que nenhum aluno demorou exatamente 70 minutos a realizar as atividades, concluímos que metade dos alunos demorou menos de 70 minutos e outra metade demorou mais do que 70 minutos. Ou seja, 14 alunos demoraram mais do que 70 minutos a terminar as atividades.

GRUPO IV

1. A distância solicitada é $\overline{AP} = \overline{AE} + \overline{EP}$, onde $\overline{AE}$ corresponde ao afélio, isto é, à distância de Saturno ao Sol quando a amplitude do ângulo x é de 0 radianos e $\overline{EP}$ corresponde ao periélio, isto é, à distância de Saturno ao Sol quando a amplitude do ângulo x é de π radianos.

Então, de acordo com o modelo apresentado, temos que:

$\overline{AP} = d\left(0\right) + d\left(\pi\right) = 1513{,}327 + 1353{,}575 \approx 2867$ milhões de quilómetros.

2. A função $y = \cos(x)$ é uma função periódica, de periodo 2π .

Também sabemos que $\cos\left(-x\right) = \cos\left(x\right)$ independentemente da amplitude do ângulo x .

Então temos que $\cos\left(2\pi - x\right) = \cos\left(-x\right) = \cos\left(x\right)$ independentemente da amplitude do ângulo x , e portanto, em particular, se x pertence ao intervalo $\left]0, \pi\right[$.

Por essa razão , no modelo apresentado, que apenas varia com o valor de $\cos\left(x\right)$, tem-se que $d\left(2\pi - x\right) = d\left(x\right)$ para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $\left]0, \pi\right[$.

3. No contexto do problema, a taxa de variação instantânea da função d , quando $x = \frac{5\pi}{16}$, apresentar o valor aproximado de $-70{,}5$, significa que, quando Saturno se encontra numa posição em que descreveu, desde o seu afélio (ponto A), um ângulo correspondente a $\frac{5\pi}{16}$ radianos, a sua distância ao Sol está a diminuir à razão aproximada de $70{,}5$ milhões de quilómetros por radiano.