

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO  
SECUNDÁRIO  
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2015**

**Grupo I**

1.

Considerando que

$$\begin{aligned}P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1 &\Leftrightarrow a + 2a + 0,4 = 1 \Leftrightarrow 3a + 0,4 = 1 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{0,6}{3} \Leftrightarrow a = 0,2\end{aligned}$$

Consequentemente a média é igual a

$$\bar{x} = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,4 = 2,2$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

2.

Por definição de probabilidade condicionada  $P(A|B)$  é a probabilidade da bola retirada ser preta sabendo que saiu uma bola com número par, como há quatro bolas pares e só duas são pretas então  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ .

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(C)

3.

Sabe-se que  $\log_b a = \frac{1}{3}$ .

Calculemos o valor de  $\log_a(a^2 b)$  usando as propriedades dos logaritmos:

$$\log_a(a^2 b) = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

A opção correta é:

Versão 1	(D)
Versão 2	(A)

4.

Uma vez que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para todo o  $k \in \mathbb{R}$ , para  $f$  ser contínua em  $\mathbb{R}$  teremos de determinar o valor de  $k$  tal que:

Dado que  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 + e^k$ , calculemos o  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 2 + 1 = 3, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Considerando a igualdade  $2 + e^k = 3$  e resolvendo a equação em ordem a  $k$ , obtemos  $2 + e^k = 3 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = 0$

A opção correta é:

Versão 1	(A)
Versão 2	(B)

5.

Seja  $f(x) = 3 \sin^2(x)$ , então:

$$f'(x) = 3 \times 2 \sin(x) \cos(x) = 3 \sin(2x)$$

$$f''(x) = 3 \cos(2x) \times 2 = 6 \cos(2x)$$

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(D)

6.

$|z| = \overline{OB}$  e como o triângulo é equilátero  $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ , logo  $|z| = 1$ .

Como o triângulo é equilátero todos os ângulos internos são iguais e têm de amplitude  $\frac{\pi}{3}$  rad.

Como o ângulo  $AOB$  é um desses ângulos internos, um argumento de  $z$  é dado por

$$\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}. \text{ Assim, } z = 1 \operatorname{cis} \left( \frac{5\pi}{3} \right)$$

A opção correta é:

Versão 1	(D)
Versão 2	(C)

7.

A circunferência  $x^2 + (y - 1)^2 = 2$  tem o seu centro no ponto  $C(0,1)$ .

Para obtermos a abscissa do ponto  $A$ , vamos considerar os pontos da circunferência de ordenada nula.

$$x^2 + (y - 1)^2 = 2 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge y = 0$$

Como o ponto  $A$  tem abscissa positiva, então terá de coordenadas  $(1,0)$ .

Considerando:

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1,0) - (0,1) = (1, -1)$$

O declive da reta  $CA$  é:

$$m_{CA} = \frac{-1}{1} = -1$$

E como  $r$  é perpendicular a  $CA$ , pois é tangente à circunferência no ponto  $A$  o seu declive vai ser o simétrico do inverso do declive da reta  $CA$ .

Assim:

$$m_r = -\frac{1}{-1} = 1$$

Logo a reta  $r$  terá uma equação do tipo:

$$y = x + b$$

Como o ponto  $A$  tem de coordenadas  $(1,0)$ , temos que:

$$0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$$

Logo a reta  $r$  tem de equação reduzida:

$$y = x - 1$$

A opção correta é:

Versão 1	(B)
Versão 2	(D)

8.

A sucessão de termo geral  $(-1)^n$  não é monótona pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos.

A sucessão de termo geral  $(-1)^n \times n$ , não é monótona pois os seus termos são alternadamente negativos e positivos e não é limitada pois é um infinitamente grande.

A sucessão definida por  $1 + n^2$  não é limitada pois é um infinitamente grande positivo.

A resposta correta é a sucessão de termo geral  $-\frac{1}{n}$ , que como se pode provar analiticamente é monótona crescente e é limitada, sendo  $-1$  um minorante e  $0$  um majorante do conjunto dos seus termos.

A opção correta é:

Versão 1	(C)
Versão 2	(B)

## Grupo II

1.

Como  $-1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  pois

- $|-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$
- Sendo  $\theta$  um argumento de  $-1 + i$ , como  $\theta \in 2^\circ$  quadrante e  $\operatorname{tg}\theta = -1$ , vem  $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Assim, substituindo em  $z_1$  vem:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1 + i}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)} \Leftrightarrow z_1 = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)} \\ &\Leftrightarrow z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) \\ &\Leftrightarrow z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{12}\right) \\ &\Leftrightarrow z_1 = \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

pelo que  $\bar{z}_1 = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} z^4 &= \bar{z}_1 \Leftrightarrow z^4 = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{\operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \\ &\Leftrightarrow z = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) \wedge k \in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned} k = 0, \quad z &= \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3}}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{2\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ k = 1, \quad z &= \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ k = 2, \quad z &= \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{10\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$k = 3, \quad z = \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{16\pi}{12}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

Os números complexos  $z$  que são solução de  $z^4 = \bar{z}_1$  são assim:

$$S = \left\{ \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right), \operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right\}$$

2.

2.1.

Teremos de determinar os valores de  $t \in ]0, 3]$ , tais que  $d(t) = d(0)$ .

$$d(t) = d(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $t \in ]0, 3]$  temos para

$$k = 0, t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$$

$$k = 1, t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$$

pelo que os instantes, diferentes do inicial, em que o ponto P passou pelo ponto A foram aos  $\frac{2}{3}s$ ,  $2s$  e aos  $\frac{8}{3}s$ .

2.2.

A função  $d$  é contínua em  $[0, +\infty[$  por ser a soma de duas funções contínuas: a função constante  $t \rightarrow 1$  e a função  $t \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ .

A função  $t \rightarrow \frac{1}{2} \text{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right)$  é contínua por ser o produto de duas funções contínuas: a função constante  $t \rightarrow \frac{1}{2}$  e a função  $t \rightarrow \text{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right)$  que é a composta de uma função trigonométrica com uma função afim.

Então  $d$  é contínua em  $[3, 4] \subset [0, +\infty[$ . Temos também

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2} \text{sen} \left( \pi \times 3 + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{7\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2} \text{sen} \left( \pi \times 4 + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \text{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Ora  $d(3) < 1,1 < d(4)$

Como a função  $d$  é contínua em  $[3, 4]$  e  $d(3) < 1,1 < d(4)$  então, pelo teorema de Bolzano, podemos afirmar que existe um ponto  $c$  do intervalo  $]3, 4[$  tal que  $d(c) = 1,1$ . Logo, há um instante entre o 3º e 4º segundos em que a distância de  $P$  a  $O$  é 1,1m.

### 3.

#### 3.1.

Calculemos os limites de  $f$  nos ramos infinitos:

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{\substack{y=-x \\ y \rightarrow +\infty}} (-ye^{-y}) = 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \\ &= 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 - 0 = 1, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty. \end{aligned}$$

Concluimos daqui que a reta de equação  $y = 1$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x-3) - \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left( \frac{x-3}{x} \right) \right] = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} \right) = \ln(1) = 0.$$

Podemos assim concluir que a reta de equação  $y = 0$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ .

#### 3.2.

Dado que  $x \in ]-\infty, 3]$  então temos que

$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1$$

$$\Leftrightarrow xe^x - 2x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$$

Determinemos os zeros de  $x(e^x - 2)$

$$x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

Recorrendo a um quadro de sinal

$x$	$-\infty$	$0$		$\ln 2$		$3$
$x$	$-$	$0$	$+$	$\ln 2$	$+$	$3$
$e^x - 2$	$-$	$-2$	$-$	$0$	$+$	$e^3 - 2$
$x(e^x - 2)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$3(e^3 - 2)$

Conclui-se que o conjunto solução de  $f(x) - 2x > 1$  é  $]-\infty, 0[ \cup ]\ln 2, 3]$ .

### 3.3.

Seja  $t$  a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 4.

$A(4, f(4)) \in t$  e o declive da reta  $t$  é dado por  $m_t = f'(4)$ .

Como  $f(4) = \ln(4 - 3) - \ln 4 = -\ln 4$  temos que  $(4, -\ln 4)$  são as coordenadas do ponto de tangência.

Calculemos  $f'(x)$

$$f'(x) = (\ln(x - 3) - \ln x)' = \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x}$$

pelo que

$$f'(4) = \frac{1}{4 - 3} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Assim, temos que a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 4, tem de equação

$$y + \ln 4 = \frac{3}{4}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 3 - \ln 4$$

4. O gráfico  $A$  não pode representar a função  $f$  porque se a função  $f$  tem derivada finita em todos os pontos do domínio então é contínua em todo o seu domínio o que não acontece uma vez que a função representada no gráfico  $A$  tem um ponto de descontinuidade.

Tendo em conta que  $f''(x) < 0, \forall x \in ]-\infty, 0[$  então nesse intervalo o gráfico da função  $f$  deveria apresentar a concavidade voltada para baixo o que não se verifica no gráfico  $B$  e por isso se exclui.

Finalmente exclui-se o gráfico  $C$  porque se  $f'(0) > 0$  então a reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa zero deveria ter declive positivo, o que não se verifica.

5.

Sabendo que  $P(A) \neq 0$ , tem-se:

$$P(A \cup \bar{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) - 1 + P(B) = P(A) \times \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(B) - P(A \cap \bar{B}) - 1 + P(B) = P(B \cap A)$$

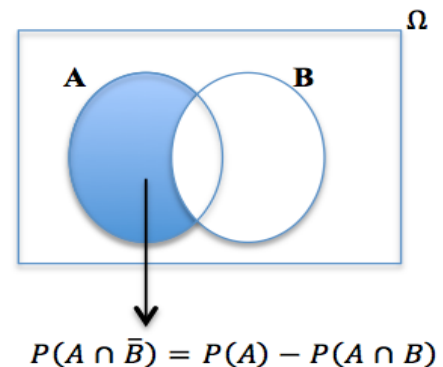
$$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap \bar{B}) = P(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) - (P(A) - P(A \cap B)) = P(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) - P(A) + P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A \cap B), \text{ c.q.d.}$$



6.

6.1.

Como  $V(1, 1, z)$  pertence ao plano  $PQV$  temos que

$$6 \times 1 + z - 12 = 0 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim, as coordenadas do ponto  $V$  são  $(1, 1, 6)$ .

6.2.

Como o plano pretendido é perpendicular à reta  $OR$  então um possível vetor normal ao plano será  $\overrightarrow{OR}$  de coordenadas  $(2, 2, 2)$ , pelo que o plano é definido por uma equação da forma

$$2x + 2y + 2z + d = 0.$$

Como  $P(0, 0, 2)$  pertence ao plano então temos que

$$2 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Assim, uma possível equação cartesiana do plano que passa no ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $OR$  é:

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

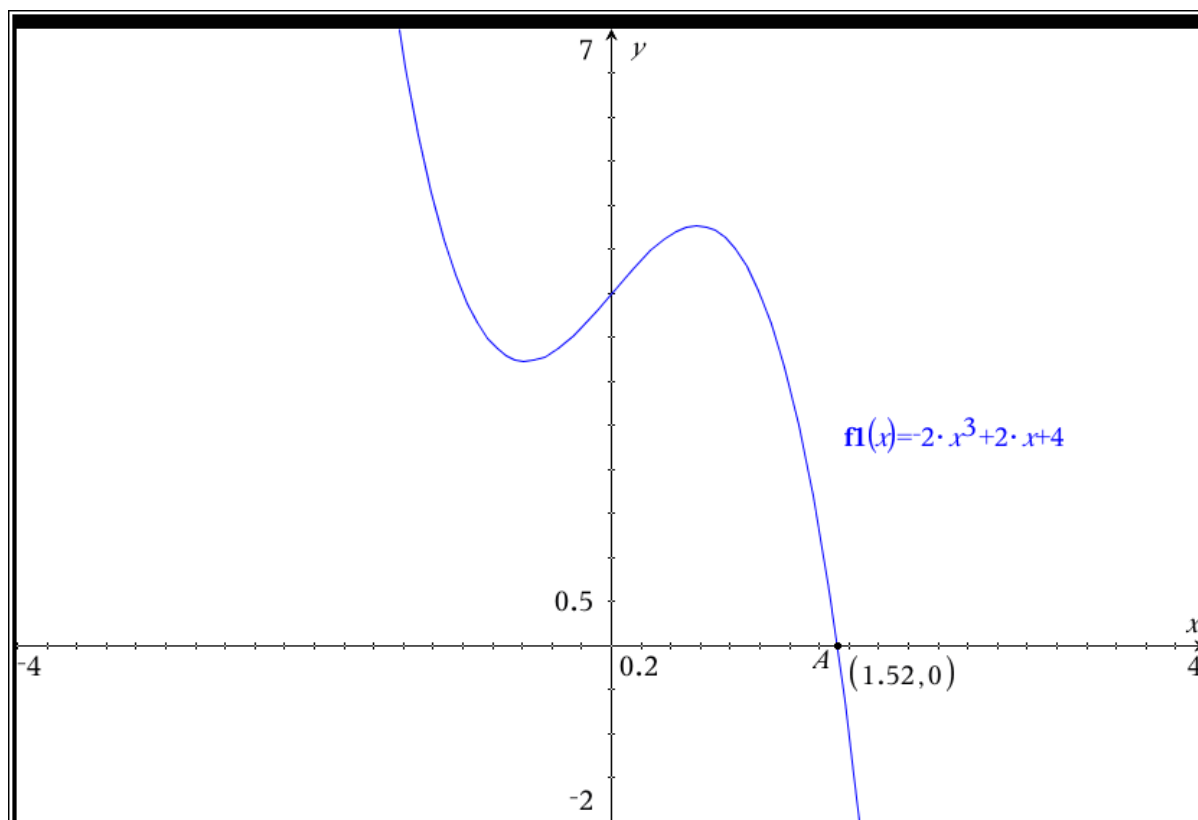
### 6.3.

De acordo com as condições do enunciado, o ponto  $A$  tem coordenadas do tipo  $(x, 2, x^3)$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Determinemos as coordenadas dos vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{TQ}$ .

$$\overrightarrow{OA} = (x, 2, x^3) \text{ e } \overrightarrow{TQ} = Q - T = (2, 2, 0) - (0, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

$$\begin{aligned} \text{Dado que } \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{TQ} \text{ temos que } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 &\Leftrightarrow (x, 2, x^3) \cdot (2, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + 4 - 2x^3 = 0 \end{aligned}$$

Tendo em conta a janela de visualização sugerida, obtemos, com recurso à calculadora gráfica, a representação gráfica da função definida por  $y_1 = 2x + 4 - 2x^3$ .



De onde se verifica que a abcissa do ponto  $A$  é aproximadamente 1,52.

#### 6.4.

Como temos 7 cores para colorir o poliedro de 9 faces então o número de casos possíveis é  $7^9$ . Tendo em conta que 2 faces triangulares devem ser coloridas de branco, que duas faces quadradas devem ser coloridas de azul e as restantes faces coloridas com cores todas diferentes então o número de casos favoráveis é dado por  ${}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!$

Assim, a probabilidade pedida é

$$p = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2 \times 5!}{7^9} \approx 0,0002$$