mathniversity®

promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2016

Grupo I

1. A função objetivo é o lucro obtido com a venda de x pares de calçado do modelo X e y pares de calçado do modelo Y: $L(x,y) = 100x + 150y$

Restrições do problema:

$x \geq 0$

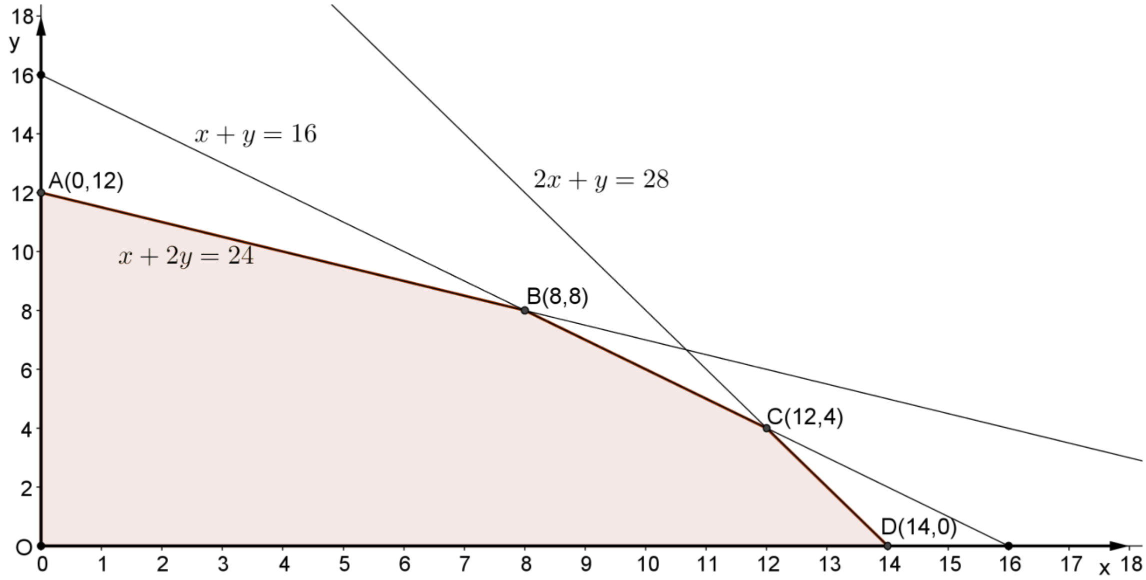
$y \geq 0$

$20x + 40y \leq 8 \times 60 \Leftrightarrow x + 2y \leq 24$ (dividindo os termos da desigualdade por 20)

$30x + 30y \leq 8 \times 60 \Leftrightarrow x + y \leq 16$ (dividindo os termos da desigualdade por 30)

$40x + 20y \leq 9 \times 60 + 20 \Leftrightarrow 2x + y \leq 28$ (dividindo os termos da desigualdade por 20)

Representação gráfica da região admissível



Vértice	x	y	$L(x,y) = 100x + 150y$
A	0	12	1800
B	**8**	**8**	**2000**
C	12	4	1800
D	14	0	1400

Solução do problema: $x = y = 8$

O lucro máximo obtém-se com a produção diária de 8 pares de calçado de cada um dos modelos X e Y.

2.

2.1. Se a soma do número de operários que trabalham no departamento de corte e do número de operários que trabalham no departamento de acabamento é 23, em vez de 20, então há 3 operários que trabalham nos dois departamentos (10 + 13 – 3).

A probabilidade de o operário escolhido trabalhar nos dois departamentos é $\frac{3}{20}$ ou 0,15

Resposta: 15%

2.2. P(o operário ter faltado no máximo 2 dias no último mês) = 0,95 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}6 + a + 0{,}15 = 0{,}95 \Leftrightarrow a = 0{,}2$

Como a soma das probabilidades $P\ (Z = z_i)$ é 1, então $b = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$

Valor médio da variável aleatória Z:

$\mu = 0 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}05 = 0{,}65$

Grupo II

1.

Tempo	0 × 20 min	1 × 20 min	2 × 20 min	...
n.º bactérias	2	4	8	...

Como esquematizado na tabela, a sucessão do número de bactérias ao fim de $n \times 20$ min é uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 4.

Como 5 horas = 5 × 3 × 20 min = 15 × 20 min, o que procuramos é o termo de ordem 15

$$g_{15} = 4 \times 2^{14} = 65\ 536$$

O número de bactérias ao fim de 5 horas é de 65 536, logo superior a 65 000.

2.

Geração n	1	2	3	...
n.º bactérias b_n	1000	2000	4000	...

×2 ×2

Como em cada geração cada bactéria se divide em duas, o número de bactérias duplica a cada geração e, por isso, (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2. Como o primeiro termo é 1000, a expressão do termo geral é:

$$b_n = 1000 \times 2^{n-1}$$

Grupo III

1. A figura 1 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, foram atendidas mais de 180 pessoas até 19 de janeiro e após o dia 9 de fevereiro, o que contraria o facto de essa situação ter ocorrido em dias consecutivos.

   A figura 2 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, ao 40º dia foram atendidas zero pessoas $\left(f\left(40\right)=0\right)$, o que contraria o facto de terem sido atendidas pessoas todos os dias.

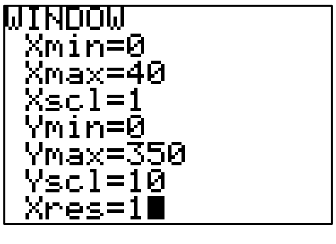
   A figura 3 não pode representar o gráfico da função f porque, de acordo com o mesmo, o dia 30 de janeiro não corresponde a um dos extremantes da função uma vez que $f\left(20\right)$ não é nem um máximo nem um mínimo da função.

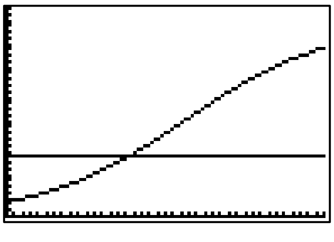
2.

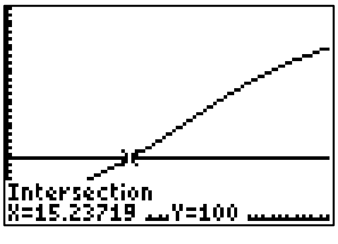
   2.1.1. Para responder, deve-se resolver a inequação

$$N_A\left(t\right) > 100 \Leftrightarrow \frac{325}{1+12\times 3^{-0,1t}} > 100$$

Determinando graficamente a interseção do gráfico de $N_A\left(t\right)$ com a reta de equação $y=100$, obtém-se $t \approx 15,2372$







Cálculo do número de horas: $0,2372 \times 24 = 5,6928$

Têm que decorrer 15 dias e 6 horas, aproximadamente, para que o número total de infetados no agrupamento A ultrapasse uma centena.

2.1.2. O número de infetados às oito horas do dia 20 de janeiro no agrupamento B é dado por $N_B(10)$.

Atendendo à relação entre N_A e N_B temos que:

$$k \times N_A(10) = N_B(10) \Leftrightarrow k = N_B(10) \times \frac{1}{N_A(10)}$$

$$\Leftrightarrow k = 39 \times \frac{1 + 12 \times 3^{-0,1 \times 10}}{325}$$

$$\Leftrightarrow k = 39 \times \frac{5}{325} \Leftrightarrow k = \frac{195}{325} \Leftrightarrow k = 0,6$$

2.2. Tendo em consideração o gráfico da função V, de onde se verifica que esta é uma função sempre positiva, podemos concluir que a função N_C é estritamente crescente (cresce sempre nos primeiros 40 dias).

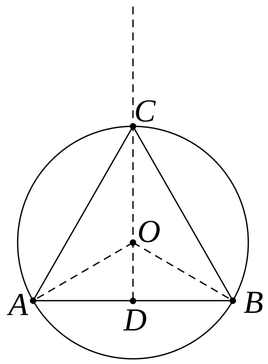
Então N_C atinge o seu valor máximo quando $t = 40$.

Desde o dia 10 de janeiro até ao fim do mês (dia 31) temos 21 dias; para perfazer 40 dias há que juntar mais 19 dias do mês de fevereiro de 2016, pelo que a afirmação é verdadeira

Grupo IV

1. Atendendo a que [ABC] é um triângulo equilátero, tem-se que

$$A\hat{O}B = \frac{360°}{3} = 120°$$



e como OC é um eixo de simetria da figura, sabemos que o ângulo ADO é reto e que $A\hat{O}D = \frac{120°}{2} = 60°$.

Então $\frac{\overline{AD}}{\overline{AO}} = sen\, 60°$

$$\overline{AD} = \overline{AO} \times sen\, 60°$$

$$\overline{AD} = \sqrt{27} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{81}}{2} = \frac{9}{2}$$ logo $\overline{AB} = 9\,\text{cm}$

2. Área da região sombreada = Área do círculo – Área do triângulo *ABC*

Área do círculo: $A_c = \pi r^2$

$$A_c = \pi \times \sqrt{27}^2 = 27\pi$$

Área do triângulo: $A_t = \dfrac{base \times altura}{2}$

altura do triângulo: $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = sen\, 60°$

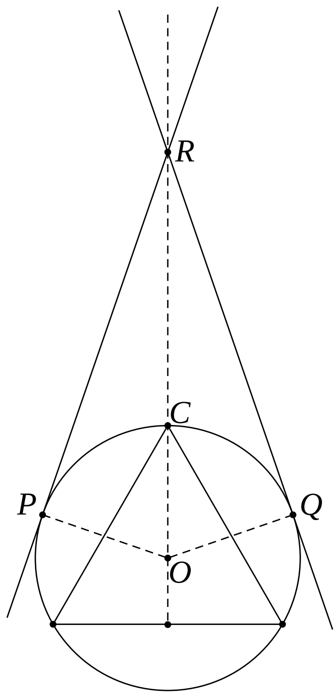
$$\frac{\overline{CD}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \overline{CD} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = \frac{9 \times \frac{9\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

Então, a área da região sombreada é $A_s = 27\pi - \dfrac{81\sqrt{3}}{4} \approx 49{,}75$

aproximadamente 50 cm^2.

3. Da figura ao lado, simétrica relativamente ao eixo *RO*, sabemos que os triângulos *OPR* e *OQR* são iguais e são triângulos retângulos porque a tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.



Tem-se

$$\overline{OR} = \overline{OC} + \overline{CR} = \sqrt{27} + 12$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{27}$$

Então

$$tg\, O\hat{R}Q = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{27}+12}$$

$$tg\, O\hat{R}Q = 0{,}302...$$

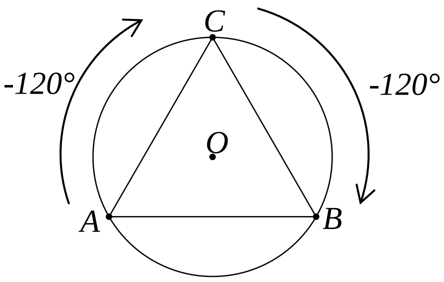
$$O\hat{R}Q = 16{,}81...°$$

Logo $P\hat{R}Q = 2 \times 16{,}81...° = 33{,}62...°$

A amplitude do ângulo *PRQ* mede aproximadamente 34°.

4.

4.1. O transformado de *A* na rotação de centro *O* e amplitude -240° é o ponto *B*, como está esquematizado na figura.



4.2. Se a razão entre as áreas dos círculos é 4, a razão entre comprimentos correspondentes é $\sqrt{4} = 2$.

Comprimento da circunferência circunscrita

$$C_c = 2 \times \pi \times \sqrt{27}$$

Então $C_i = \pi \times \sqrt{27} = 16{,}324....$

O comprimento da circunferência inscrita é aproximadamente 16,32 cm.