mathniversity®
promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2016

GRUPO I

1.

Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6}$,

temos que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: D

2.

Dado que X é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 10, então

$P(X < 10) = P(X > 10) = 0,5$ e $P(7 < X < 10) = P(10 < X < 13) = 0,3$

Assim,

$P(X > 13) = P(X > 10) - P(10 < X < 13) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

3.

$$\lim_{x\to a}\frac{a\,e^{x-a}-a}{x^2-a^2}=\lim_{x\to a}\frac{a\left(e^{x-a}-1\right)}{(x-a)(x+a)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{a}{x+a}\times\frac{e^{x-a}-1}{x-a}\right)=$$

$$=\frac{a}{a+a}\times\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=\frac{a}{2a}\times\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=$$

$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}$$

Fazendo a mudança de variável: $y=x-a$,

Como $x\to a$ então $y\to 0$

e assim,

$$\frac{1}{2}\times\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a}=\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\textit{limite notável}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

4.

Como $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+e^{x}-x}{x}=1$

então,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{e^{x}}{x}-\frac{x}{x}\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)+\frac{e^{-\infty}}{-\infty}-1=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)+0-1=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)-1=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=1+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=2$$

Pelo que o declive da assíntota oblíqua ao gráfico de f é igual a 2.

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

5.

Tendo em conta de que área do trapézio $\left[OPQR\right]$é dada por: $A_{\left[OPQR\right]} = \dfrac{\overline{PO} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ}$

e que $\overline{PO} = 1$ e $\overline{PQ} = \cos\alpha$, então

$\overline{QR} = 1 + \left(-\operatorname{sen}\alpha\right)$, pois $\operatorname{sen}\alpha$ no quarto quadrante é negativo.

Temos então que:

$$A = \frac{1 + \left(1 - \operatorname{sen}\alpha\right)}{2} \times \cos\alpha = \frac{2 - \operatorname{sen}\alpha}{2} \times \cos\alpha = \cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2} ,$$

Resposta correta:

Versão 1: D	
Versão 2: C	

6.

Considerando que:

$z = -3\operatorname{cis}\theta = 3 \times \operatorname{cis}\pi \times \operatorname{cis}\theta = 3\operatorname{cis}\left(\pi + \theta\right)$ temos que um argumento z é $\pi + \theta$

Como $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, então $\pi + \pi < \pi + \theta < \pi + \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\pi < \pi + \theta < \dfrac{5\pi}{2}$,

Pelo que, a imagem geométrica do complexo z pertence ao primeiro quadrante.

Resposta correta:

Versão 1: A	
Versão 2: D	

7.

Como o triângulo $\left[ABC\right]$ é isósceles, então $\mathrm{A\hat{C}B} = \mathrm{C\hat{A}B} = 75^\circ$, pelo que

$A\hat{B}C = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ$.

Logo, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\,\hat{}\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos\left(30^\circ\right) = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Resposta correta:

Versão 1: C	
Versão 2: A	

8.

Tem-se que:

- $\lim(u_n) = \lim \dfrac{kn + 3}{2n} = \lim \dfrac{k\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \dfrac{k}{2}$
- $\lim(v_n) = \lim\left(\ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)\right) = \ln\left(\lim\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(e^1\right) = 1.$

Logo, como $\lim(u_n) = \lim(v_n)$, vem que $\dfrac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: A

GRUPO II

1.

Escrevendo $-1 + \sqrt{3}i$ na forma trigonométrica temos $-1 + \sqrt{3}i = \rho\, cis\theta$, onde:

- $\rho = \left|-1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$
- θ é um argumento de $-1 + \sqrt{3}i$ com $\theta \in 2.^{\text{o}}$ quadrante e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$, vem

  $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ (argumento positivo mínimo).

Assim, $-1 + \sqrt{3}i = 2\,cis\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Substituindo em z_1, temos:

$$z_1 = \frac{8\,cis\theta}{-1 + \sqrt{3}i} \Leftrightarrow z_1 = \frac{8\,cis\theta}{2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow z_1 = 4\,cis\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

pelo que, $\overline{z_1} = 4\,cis\left(-\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ e

$$\overline{z_1} \times z_2 = 4\,cis\left(-\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \times cis(2\theta) = 4\,cis\left(-\theta + \frac{2\pi}{3} + 2\theta\right) = 4\,cis\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Para ser um número real $\theta + \dfrac{2\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, temos $\theta = -\dfrac{2\pi}{3} \notin \left]0\ ,\ \pi\right[$

Se $k = 1$, temos $\theta = \dfrac{\pi}{3} \in \left]0\ ,\ \pi\right[$

Se $k = 2$, temos $\theta = \dfrac{4\pi}{3} \notin \left]0\ ,\ \pi\right[$

Logo, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

2.

2.1.

Seja X : "produto dos números das duas bolas retiradas"

Os produtos podem ser:

$$1 \times 1 = 1 \qquad 1 \times 2 = 2 \qquad 1 \times 4 = 4 \qquad 2 \times 2 = 4 \qquad 2 \times 4 = 8$$

Logo, os produtos possíveis são 1, 2, 4 ou 8 (não pode ser 16, pois só existe uma bola com o número 4).

$$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$$

$$P(X = 4) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$$

$$P(X = 8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$$

Assim, a tabela de distribuição da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

2.2.

1º processo: $\frac{8!}{4! \times 3!} = 280$

2º processo: $\frac{8! \times 4}{4! \times 4!} = 280$

3º processo: ${}^8C_4 \times {}^4C_3 \times {}^1C_1 = 280$

Logo, de acordo com as condições do enunciado, podem-se obter 280 números ímpares diferentes.

3.

3.1.

Como a superfície esférica tem centro no ponto $A(-1, 1, 1)$ e é tangente ao plano xOy, o seu raio é $r = dist\,(A, xOy) = z_A = 1$.

Assim, uma condição que define a superfície esférica é:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$$

3.2.

Como a pirâmide $[ABCDV]$ é quadrangular regular e a sua base $[ABCD]$ é paralela ao plano xOy, a abcissa e a ordenada do ponto V são iguais à abcissa e ordenada do ponto médio, M, do segmento de reta $[AC]$.

Então, $M\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$, isto é, $M(-2, 2, 1)$.

Assim, as coordenadas de V são da forma $V(-2, 2, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

Como V pertence ao plano BCV as suas coordenadas têm de verificar a equação $3y + z - 10 = 0$.

Deste modo vem: $3 \times 2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow z = 4$

Portanto as coordenadas do ponto V são $(-2, 2, 4)$.

3.3.

Determinemos uma equação cartesiana do plano α.

Como o plano α é perpendicular à reta AC o vetor $\overrightarrow{AC}$ é um vetor normal ao plano α.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-2, 2, 0)$

O plano α é definido por uma equação da forma $-2x + 2y + d = 0$

Como o ponto $P(1, -2, -1)$ pertence ao plano α, temos que:

$$-2 \times 1 + 2 \times (-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 + 4 \Leftrightarrow d = 6$$

Assim, uma equação cartesiana do plano α que passa no ponto P e é perpendicular à reta AC é:

$-2x + 2y + 6 = 0$ equivalente a $-x + y + 3 = 0$.

Seja r a reta de intersecção dos planos α e BCV.

A reta r é definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{-z + 10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{z - 10}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

A reta r é a reta que passa no ponto de coordenadas $(3, 0, 10)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (1, 1, -3)$.

Portanto uma equação vetorial da reta pedida é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + k(1, 1, -3), \ k \in \mathbb{R}$$

4.

4.1.

Para determinar o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $\left[0\,,1\right]$ é necessário calcular os extremos relativos de h naquele intervalo.

Comecemos por determinar a expressão analítica da primeira derivada de h

$$h'(t) = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right)' + \left(t \times sen(2\pi t)\right)' =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi}\left(cos(2\pi t)\right)' + t' \times sen(2\pi t) + t \times \left(sen(2\pi t)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-2\pi\, sen(2\pi t)\right) + sen(2\pi t) + t \times \left(2\pi\, cos(2\pi t)\right) =$$

$$= -sen(2\pi t) + sen(2\pi t) + 2\pi t \times cos(2\pi t) =$$

$$= 2\pi t \times cos(2\pi t)$$

Calculemos os zeros da derivada da função h, para $0 \le t \le 1$:

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow 2\pi t \times cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow \left(t = 0 \vee cos(2\pi t) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(t = 0 \vee t = \frac{2k+1}{4}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} \vee t = \frac{3}{4}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	2π
$h(t)$	$h(0)$	↗	$h\left(\frac{1}{4}\right)$	↘	$h\left(\frac{3}{4}\right)$	↗	$h(1)$

Por observação da tabela, verificamos que $h(0)$ e $h\left(\frac{3}{4}\right)$ são mínimos relativos e que $h\left(\frac{1}{4}\right)$ e $h(1)$ são máximos relativos de h.

Como $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20{,}16$; $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20{,}25$; $h\left(\frac{3}{4}\right) = 19{,}25$ e $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \approx 20{,}16$, podemos afirmar que os extremos absolutos de h são:

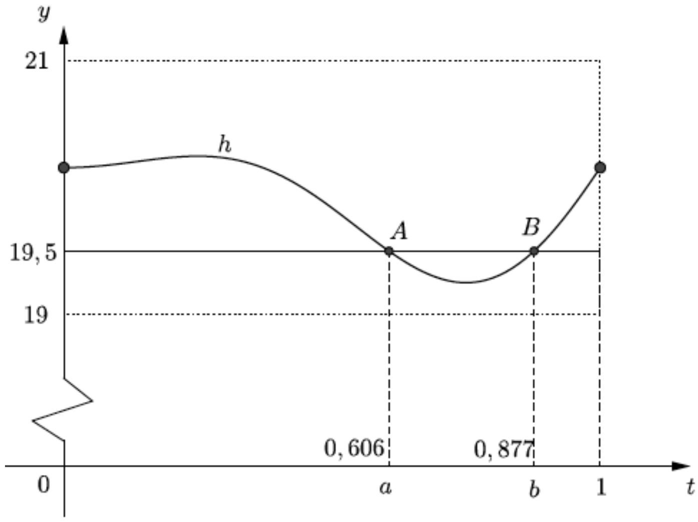
$M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20{,}25$ e $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 19{,}25$, respetivamente máximo e mínimo absolutos de h.

Assim, $A = M - m = 20{,}25 - 19{,}25 = 1$

De onde se conclui que, a amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, no intervalo $\left[0\,,1\right]$, é de 1 metro.

4.2.

Na figura estão representados, de acordo com o enunciado, o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19{,}5$, obtidos na janela de visualização $\left[0, 1\right] \times \left[19, 21\right]$, bem como os pontos A e B, de interseção dos dois gráficos.



O conjunto solução da condição $h(t) < 19{,}5$ é um intervalo da forma $\left]a, b\right[$ em que a e b são as abcissas dos pontos A e B, respetivamente.

Recorrendo à calculadora gráfica, obtém-se para a e b os valores aproximados às milésimas: $a \approx 0{,}606$ e $b \approx 0{,}877$.

Assim, o valor arredondado às centésimas de $b - a$ é $0{,}27$.

No contexto da situação descrita, podemos concluir que no primeiro minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale, foi inferior a $19{,}5$ metros durante cerca de $0{,}27$ minutos.

5.

5.1.

Sabemos que p corresponde ao valor da derivada da função f no ponto de abcissa -1. Assim,

$$p = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = f'(-1) = e^{-1} \times \left((-1)^2 + (-1) + 1\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Logo, $q = \dfrac{1}{-p} = -\dfrac{1}{\frac{1}{e}} = -e$.

Como q é igual ao simétrico do inverso de p (declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$), então podemos afirmar que q é igual ao declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -1$.

5.2.

Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão do gráfico de f , determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^x \times \left(x^2 + x + 1\right)\right)' = \left(e^x\right)' \times \left(x^2 + x + 1\right)' = \\ &= e^x \times \left(x^2 + x + 1\right) + e^x \times (2x + 1) = \\ &= e^x \times \left(x^2 + 3x + 2\right) \end{aligned}$$

Calculemos os zeros da segunda derivada de f :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \times \left(x^2 + 3x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , temos:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$

Podemos então concluir que o gráfico da função f tem:

- a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2\ ,\ -1[$;
- a concavidade voltada para cima em $]-\infty\ ,\ -2[$ e em $]-1\ ,\ +\infty[$;
- dois pontos de inflexão de abcissas -2 e -1 .

6.

6.1.

Como f é uma função contínua em $]-\infty\ ,\ -1[$ e em $]1\ ,\ +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f .

Para averiguar se as reta de equação $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas do gráfico de f , calcule-se:

$\lim_{x \to -1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$:

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1}\right) = \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$.

Assim, como ambos os limites são infinitos, podemos concluir que as duas retas de equação $x = -1$ e $x = 1$ são assíntotas verticais do gráfico de f e que não existe qualquer outra assíntota vertical.

6.2.

Calculando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a , temos:

$$m = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a + a} = \frac{\ln\left(\frac{\frac{a-1}{a+1}}{\frac{-a-1}{-a+1}}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{(a-1)(-a+1)}{(a+1)(-a-1)}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{(a-1)(-(a-1))}{(a+1)(-(a+1))}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{-(a-1)^2}{-(a+1)^2}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a}$$

Como a reta contém o ponto de coordenadas $\left(a\ ,\ \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)\right)$, substituindo as coordenadas e o declive na equação $y = mx + b$, podemos determinar o valor da ordenada na origem:

$$\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} \times a + b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = b$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.