

### PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2016

#### GRUPO I

1.

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 &\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0,6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0,6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 \end{aligned}$$

Logo,

$$0,2 + 0,3 - P(A \cap B) = 0,4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,1.$$

Como  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ , temos que:

$$P(A|B) = \frac{0,1}{0,3}.$$

$$\text{Assim, } P(A|B) = \frac{1}{3}$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: B

2.

Como se trata de uma distribuição binomial em que a probabilidade de sucesso é 0,4 e o número de experiências é 5 então, a probabilidade de encestar exatamente 4 vezes é igual a:

$${}^5C_4 \times 0,4^4 \times 0,6^1 = 0,0768$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

3.

Dado que:

$$\log_a(ab^3) = 5 \Leftrightarrow \log_a(a) + 3\log_a(b) = 5 \Leftrightarrow 1 + 3\log_a(b) = 5, \text{ pois } a \text{ e } b \text{ são ambos positivos,}$$

temos

$$\log_a(b) = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{4}{3}$$

Mas,

$$\log_b(a) = \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} \text{ pelo que,}$$

$$\log_b(a) = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow \log_b(a) = \frac{3}{4}$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: A

4.

$$\lim f(u_n) = \lim \left( \ln \left( \frac{n}{e^n} \right) \right) = \lim \left( \ln \left( \frac{e^n}{n} \right)^{-1} \right) = - \lim \left( \underbrace{\ln \left( \frac{e^n}{n} \right)}_{\text{limite notável}} \right) = - \ln(+\infty) = -\infty$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: C

5.

Calculemos a área do triângulo  $[PQR]$  em função de  $\alpha$ :

$$Area_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \text{altura}}{2}, \text{ sendo a altura igual a } 2 \times \overline{OR}.$$

$$\text{Ora, } \overline{QR} = |\cos(\pi + \alpha)| = |-\cos \alpha| = \cos \alpha, \text{ pois } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Sabe-se que  $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , com  $\cos \alpha > 0$  e  $\sin \alpha > 0$ , então  $2 \times \overline{OR} = 2 \times \sin \alpha$ .

$$\text{Portanto, } Area_{[PQR]} = \frac{\cos \alpha \times 2 \times \sin \alpha}{2} = \frac{\sin(2\alpha)}{2}.$$

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: C

6.

As raízes de índice 6 do número complexo  $w$  têm como imagem geométrica os vértices de um hexágono regular centrado na origem do referencial e inscrito numa circunferência de raio igual ao módulo de  $z$  que é uma das raízes de índice 6 de  $w$ .

Como  $z = 3 + 4i$ , o raio da circunferência é  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$  e como o lado do hexágono tem comprimento igual ao raio da circunferência que o circunscreve, então o perímetro do hexágono igual a:

$$6 \times |z| = 6 \times 5 = 30$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: B

7.

Como a circunferência está inscrita no quadrado, a medida do comprimento do seu diâmetro é igual à medida do comprimento do lado do quadrado.

Sendo  $l$  a medida do lado do quadrado e  $r$  a medida do raio da circunferência, então  $r = \frac{l}{2}$ .

Dado que  $l = 5 - 1 = 4$ , então  $r = 2$ .

As coordenadas do centro da circunferência são  $\left(\frac{4+0}{2}, \frac{1+5}{2}\right)$ , isto é,  $(2, 3)$ .

Uma condição que define a circunferência de centro  $(2, 3)$  e raio 2 é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: D

8.

Como  $(u_n)$  é uma progressão geométrica podemos escrever  $u_8 = u_4 \times r^{8-4}$ , sendo  $r$  a razão da progressão.

Assim,

$$u_8 = u_4 \times r^4 \Leftrightarrow 8192 = 32 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = 256.$$

A progressão geométrica  $(u_n)$  é monótona pelo que a razão  $r$  é um número real positivo. Então,

$$r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \Leftrightarrow r = 4.$$

Como  $(u_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $r = 4$  tem-se:

$$u_5 = u_4 \times r \Leftrightarrow u_5 = 32 \times 4 \Leftrightarrow u_5 = 128$$

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

## GRUPO II

1.

No contexto da situação descrita  $P(A|B)$  é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

Os casos possíveis correspondem aos pares da forma  $(u, v)$  cuja soma dos números  $u$  e  $v$  é igual a 10 e esses pares são os seguintes:

$$(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6).$$

Destes casos possíveis, os casos favoráveis são  $(1, 9)$  e  $(3, 7)$ , pois são os pares correspondentes aos casos em que os produtos dos dois números é ímpar.

Assim, usando a regra de Laplace, a probabilidade pedida é  $\frac{2}{4}$ .

Apresentando o resultado na forma de fração irredutível a resposta é  $\frac{1}{2}$ .

1.2.

Como o tabuleiro possui 4 filas na horizontal, existem 4 possibilidades diferentes de colocar os números pares ocupando uma única fila horizontal.

Fixada uma fila horizontal há  $4!$  formas diferentes de dispor essas 4 fichas pares nessa fila.

Para distribuir as restantes 5 fichas nos 12 espaços livres do tabuleiro existem  ${}^{12}A_5$  maneiras diferentes de o fazer.

Assim, o número pedido é dado por:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9123840$$

2.

Escrevendo  $-1 + i$  na forma trigonométrica temos  $-1 + i = r \operatorname{cis} \alpha$ , onde:

$$\bullet r = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\bullet \alpha$  é um argumento de  $-1 + i$  com  $\alpha \in 2.^\circ$  quadrante e  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{-1} = -1$ , vem

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ (argumento positivo mínimo).}$$

(Note-se que podíamos ter considerado  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ , referindo que a imagem geométrica do complexo  $-1 + i$  pertence ao segundo quadrante pois está sobre a bissetriz dos quadrantes pares.)

$$\text{Assim, } -1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{4} \right).$$

Substituindo em  $z$ , temos:

$$z = \frac{-1 + i}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{4} \right)}{\rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{4} - 2\theta \right)$$

Escrevendo, agora,  $w$  na forma trigonométrica temos  $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{2} \right)$ , pois  $w$  pertence ao semieixo negativo das ordenadas.

Considerando a igualdade  $z = w$ , temos:

$$z = w \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{4} - 2\theta \right) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{3\pi}{2} \right), \text{ ou seja:}$$

- $\bullet \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = 1 \vee \rho = -1 \Leftrightarrow \rho = 1$ , porque o módulo é um número positivo.
- $\bullet \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resolvendo a equação  $\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , obtemos:

$$\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{6\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Procuramos  $\theta \in ]0, \pi[$ :

Se  $k = 0$ , temos  $\theta = -\frac{3\pi}{8} \notin ]0, \pi[$

Se  $k = 1$ , temos  $\theta = \frac{5\pi}{8} \in ]0, \pi[$

Se  $k = 2$ , temos  $\theta = \frac{13\pi}{8} \notin ]0, \pi[$

Logo,  $\rho = 1$  e  $\theta = \frac{5\pi}{8}$ .

### 3.

#### 3.1.

Como o vetor de coordenadas  $(3, 2, 4)$  é um vetor normal ao plano  $\alpha$  então é um vetor diretor da reta perpendicular ao mesmo. Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano  $\alpha$  e que passa no ponto  $C$  é  $(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), k \in \mathbb{R}$ .

#### 3.2.

Um vetor diretor da reta  $OD$  é  $\overline{OD} = D - O = (4, 2, 2) - (0, 0, 0) = (4, 2, 2)$ .

A reta  $OD$  é definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{4} = \frac{y-2}{2} \\ \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \end{cases}$$

Intersectando com o plano  $\alpha$ , vem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x-4}{4} = \frac{y-2}{2} \\ \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x - 4 = \frac{4(y-2)}{2} \\ y - 2 = z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x - 4 = 2y - 4 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times 2y + 2y + 4y - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do ponto de intersecção da reta  $OD$  com o plano  $\alpha$  são  $(2, 1, 1)$ .

#### 3.3.

Tem-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$ . Logo, as suas coordenadas são do tipo  $A(x, 0, 0)$ , com  $x > 0$ .
- o ponto  $B$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$ . Logo, as suas coordenadas são do tipo  $B(0, y, 0)$ , com  $y > 0$ .
- o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Oz$ , sendo a sua cota não nula. Logo, as suas coordenadas são do tipo  $P(0, 0, z)$ , com  $z \neq 0$ .

Tem-se que  $\widehat{APB} = \widehat{\overline{PA} \overline{PB}}$ . Como cada um dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$  pertence a um eixo coordenado diferente, os vetores  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$  nunca são colineares, pelo que o ângulo  $APB$  nunca é nulo. Logo, para provar que o ângulo  $APB$  é agudo basta provar que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} > 0$ . Assim, como  $\overline{PA} = (x, 0, 0) - (0, 0, z) = (x, 0, -z)$  e  $\overline{PB} = (0, y, 0) - (0, 0, z) = (0, y, -z)$ , então

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (x, 0, -z) \cdot (0, y, -z) = z^2 \text{ e } z^2 > 0, \forall z \neq 0.$$

Portanto,  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} > 0$ . Logo, o ângulo  $APB$  é um ângulo agudo.

#### 4.

##### 4.1.

Considerando o domínio da função  $f$  se existir assíntota oblíqua ela ocorrerá quando  $x \rightarrow +\infty$ . Sendo assim, procuremos uma reta de equação  $y = mx + b$ , com  $m$  e  $b$  pertencentes a  $\mathbb{R}$  e

$$m \neq 0, \text{ em que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = b.$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}}$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x - \ln x) - x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = -\infty$$

Dado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = -\infty$  podemos afirmar que o gráfico da função  $f$  não tem assíntota oblíqua.

##### 4.2.

Para estudarmos a monotonia da função  $f$  e a existência de extremos relativos no intervalo

$\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ , determinemos a expressão analítica da primeira derivada de  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2 + \text{sen}(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{(2 + \text{sen}(x))' \times \cos(x) - (\cos(x))' \times (2 + \text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos(x) \times \cos(x) - (-\text{sen}(x)) \times (2 + \text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x) + 2\text{sen}(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{1 + 2\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Calculemos os zeros da primeira derivada de  $f$ :

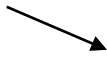

$$\begin{aligned} 1 + 2\text{sen}(x) = 0 &\Leftrightarrow \text{sen}(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(x) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

No intervalo considerado só  $x = -\frac{\pi}{6}$  é solução da equação  $1 + 2\text{sen}(x) = 0$ .

Como  $\cos^2(x) > 0, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$ , o sinal da derivada depende apenas do sinal da expressão

$$1 + 2\text{sen}(x).$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$0$
$f'(x)$	n.d.	-	$0$	+	n.d.
$f(x)$	n.d.		Min.		n.d.

Dado que:

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por observação da tabela, verificamos que a função  $f$ :

- tem um mínimo relativo igual a  $\sqrt{3}$  para  $x = -\frac{\pi}{6}$ .
- é monótona decrescente no intervalo  $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right[$  e monótona crescente no intervalo  $\left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[$ .

#### 4.3.

Seja  $y = mx + b$  a equação da reta  $r$ .

Considerando que a reta  $r$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $\frac{1}{2}$ , então

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

A função derivada de  $f$  para  $x > 0$  é dada por  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ .

Temos então que:  $m = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$ .

Como a reta é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $\frac{1}{2}$ , então o ponto

$\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  pertence à reta e permite-nos determinar o valor de  $b$ .

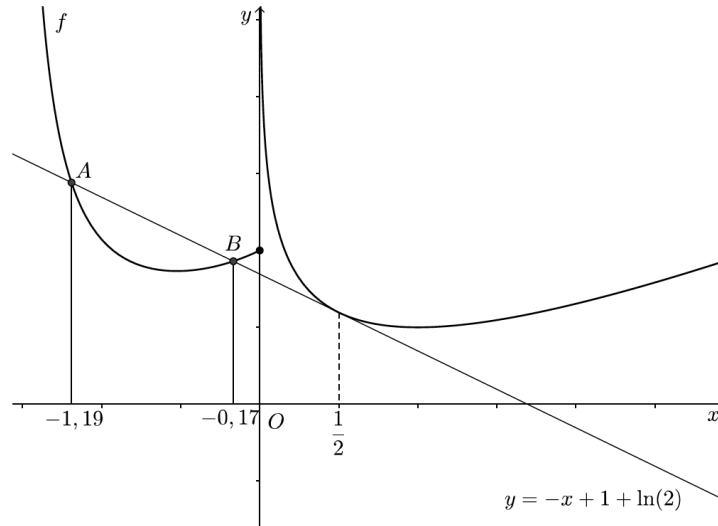
Dado que  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln(2^{-1}) = \frac{1}{2} + \ln(2)$  e considerando que a reta  $r$  é

definida por uma equação da forma  $y = -x + b$ , obtemos:

$$\frac{1}{2} + \ln(2) = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = 1 + \ln(2).$$

Assim, a equação da reta  $r$  é  $y = -x + 1 + \ln(2)$ .

Recorrendo à calculadora gráfica obtemos a representação gráfica da função  $f$  e da reta  $r$  no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, 3 \right[$ :



De onde se verifica que as abscissas dos pontos  $A$  e  $B$  são, respetivamente,  $-1,19$  e  $-0,17$  com uma aproximação às centésimas.

**5.**

**5.1.**

Como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros e  $x = 0,003$ , temos:

$$p = 24.$$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$\begin{aligned} 24 &= \frac{600 \times 0,003}{1 - e^{-n \times 0,003}} \Leftrightarrow 24 - 24e^{-0,003n} = 1,8 \Leftrightarrow e^{-0,003n} = \frac{24 - 1,8}{24} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,003n} = 0,925 \Leftrightarrow -0,003n = \ln 0,925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0,925}{-0,003} \end{aligned}$$

Como  $\frac{\ln 0,925}{-0,003} \approx 26$ , concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

**5.2.**

Calculando o valor do limite, em função de  $n$ , vem que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \frac{600 \times 0}{1 - e^{-n \times 0}} = \frac{0}{1 - e^0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

Fazendo a mudança de variável:  $y = -nx \Leftrightarrow x = -\frac{y}{n}$ ,

Como  $x \rightarrow 0$  então  $y \rightarrow 0$

e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600 \left( -\frac{y}{n} \right)}{1 - e^{-n \left( -\frac{y}{n} \right)}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( -600 \times \frac{\frac{y}{n}}{1 - e^y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (-600) \times \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \times \frac{1}{n}}{1 - e^y} \right) = -600 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{n} \times \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{1 - e^y} \right) = \\ &= -600 \times \frac{1}{n} \times \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-(-1 + e^y)} \right) = -600 \times \frac{1}{n} \times \left( - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} \right) = \\ &= \frac{600}{n} \times \left( \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} \right)^{-1} = \frac{600}{n} \times (1)^{-1} = \frac{600}{n}\end{aligned}$$

Ou seja, se  $x \rightarrow 0$ , o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de  $\frac{600}{n}$ , o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em  $n$  parcelas iguais, durante  $n$  meses.

6.

Como  $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$ , então provar que a equação  $g(x) = x + 1$  é possível no intervalo  $]a, g(a)[$  é equivalente a provar que a equação  $f(x) = 0$  é possível no intervalo  $]a, g(a)[$ , com  $f(x) = g(x) - x - 1$

A função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por ser a soma de duas funções contínuas, a função  $g$  e a função afim definida por  $y = -x - 1$ . Em particular a função  $f$  é contínua no intervalo  $]a, g(a)[$ .

Cálculos auxiliares:

$$f(a) = g(a) - a - 1 = g(a) - (a + 1)$$

Como  $g(a) > a + 1$ , então  $g(a) - (a + 1) > 0$ , ou seja,  $f(a) > 0$ .

$$f(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 = -g(a) + a - 1$$

Como  $g(a) > a + 1$ , vem

$$-g(a) < -a - 1 \Leftrightarrow -g(a) + a - 1 < -a - 1 + a - 1 \Leftrightarrow f(g(a)) < -2 \Rightarrow f(g(a)) < 0$$

Assim,  $f(a)$  e  $f(g(a))$  têm sinais contrários.

Logo, como  $f(a) \times f(g(a)) < 0$  e a função  $f$  é contínua em  $]a, g(a)[$ , pelo corolário do teorema de Bolzano conclui-se que a função  $f$  tem pelo menos um zero em  $]a, g(a)[$ , pelo que a equação  $g(x) = x + 1$  tem pelo menos uma solução no intervalo  $]a, g(a)[$ .