

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO**

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 23 DE JUNHO 2017

GRUPO I

1.

Dado que os algarismos que são usados são os do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, um número formado por quatro algarismos que seja múltiplo de 5 tem, necessariamente, que terminar em 5. Assim, para cada uma das restantes três posições para formar o número temos nove hipóteses. Conclusão, existem $9^3 = 729$ números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: D

2.

Consideremos os acontecimentos:

R – O aluno escolhido ser rapaz

V – O aluno escolhido ter olhos verdes.

Se $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes, então $P(V|R) = \frac{1}{4}$, e se escolhido, ao acaso, um aluno da

turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$, isto significa que

$$P(R \cap V) = \frac{1}{10}.$$

Da definição de probabilidade condicionada temos que:

$$P(V|R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{10}}{P(R)}, \text{ resolvendo a equação em ordem a } P(R), \text{ vem:}$$

$$P(R) = 4 \times \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(R) = \frac{4}{10}.$$

Dado que a turma tem 20 alunos e destes $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ são rapazes, então o número de rapazes da

turma é $\frac{2}{5} \times 20 = 8$.

Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: D

3.

Considerando as concavidades do gráfico da figura concluímos, por um lado, que $f''(-1) < 0$ e que $f''(-2) < 0$. E, por outro lado, que $f''(1) > 0$ e que $f''(2) > 0$.

Considerando as quatro hipóteses de resposta a única que é verdadeira é a $f''(1) \times f''(2) > 0$.

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

4.

Considerando que $y = -x$ é assíntota oblíqua quer do gráfico de f quer do gráfico de g , então

verifica-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \times g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times \frac{g(x)}{x} \times x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = \\ &= (-1) \times (-1) \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

Resposta correta:

Versão 1: A
Versão 2: C

5.

Consideremos a seguinte figura:

observando-a, conclui-se que

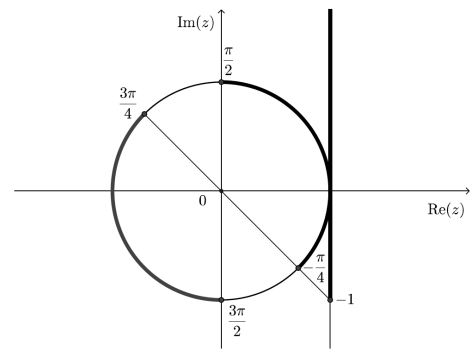
$$\operatorname{tg} x > -1 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, k \in \mathbf{Z} .$$

Portanto:

- se $k = 0$ então $x \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, não estando este intervalo representado em nenhuma das opções;

- se $k = 1$ então $x \in \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$, estando este intervalo representado numa das opções.

Logo, A pode ser o conjunto $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$.



Resposta correta:

Versão 1: B
Versão 2: C

6.

Tem-se que α é a inclinação da reta r , pelo que o seu declive é dado por $\operatorname{tg} \alpha$.

Como $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, vem que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, pelo que $\operatorname{tg} \alpha < 0$

Logo, usando a fórmula $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, vem:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{4}$$

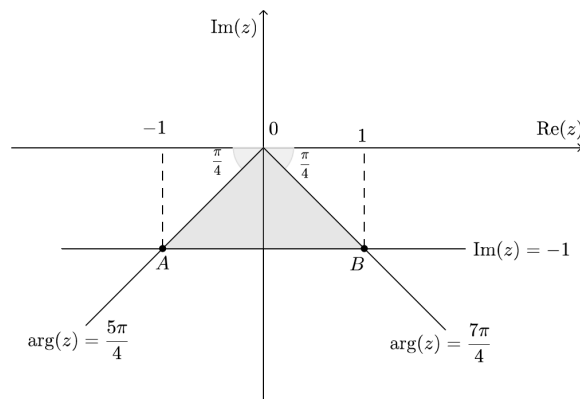
Como $\operatorname{tg} \alpha < 0$, vem $\operatorname{tg} \alpha = -2$, pelo que o declive da reta é -2 . Das opções apresentadas, apenas uma tem uma equação de uma reta cujo declive é -2 .

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

7.

A condição $\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \wedge \operatorname{Im}(z) \geq -1$ define a região a sombreado da figura seguinte:



A condição define o triângulo $[AOB]$, em que a medida do comprimento da sua altura é 1 e $\overline{AB} = 2$. Logo,

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times \text{altura}}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$

Resposta correta:

Versão 1: D
Versão 2: B

8.

Tem-se que para $n \in \mathbb{N}$ e:

- para $n \leq 20$, $u_n = n$, pelo que $1 \leq u_n \leq 20$
- para $n > 20$, $u_n = (-1)^n$, pelo que $u_n = -1$ se n é ímpar e $u_n = 1$ se n é par.

Logo, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta correta:

Versão 1: C
Versão 2: A

GRUPO II

1.

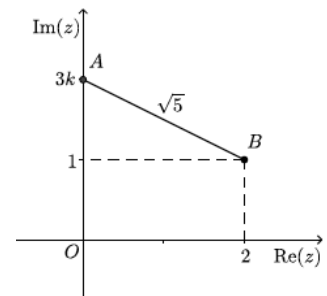
Tem-se que:

- $i^{19} = i^{16+3} = i^{4 \times 4} \times i^3 = (i^4)^4 \times (-i) = 1^4 \times (-i) = 1 \times (-i) = -i$
- $z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} = \frac{1-3(-i)}{1+i} = \frac{1+3i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i+3i-3i^2}{1^2-i^2} = \frac{1-i+3i+3}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$
- $z_2 = -3k \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -3k \times (-i) = 3ki$

A distância entre z_1 e z_2 é dada por $|z_1 - z_2|$.

Assim,

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| = \sqrt{5} &\Leftrightarrow |2+i-3ki| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2+i(1-3k)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2^2 + (1-3k)^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{4+(1-3k)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$



Como para todo o $k \in \mathbb{R}^+$, $4+(1-3k)^2 > 0$, elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{4+(1-3k)^2}\right)^2 &= (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 4+(1-3k)^2 = 5 \Leftrightarrow (1-3k)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-3k = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-3k = -1 \vee 1-3k = 1 \Leftrightarrow -3k = -2 \vee -3k = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2}{3} \vee k = 0 \end{aligned}$$

Dado que $k \in \mathbb{R}^+$, então $k = \frac{2}{3}$.

2.

2.1.

Como o plano STU tem equação $z = 3$, então $T(0, 0, 3)$ e $T'(0, 0, -3)$. Assim, o centro da superfície esférica de diâmetro $[TT']$ é a origem do referencial $(0, 0, 0)$ e o raio é igual a 3.

A equação da superfície esférica pedida é: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

2.2.

Como $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma e a altura é 3.

$$\|\overline{UP}\| = 3$$

$$\|\overline{RS}\| = 3$$

O ângulo formado pelos vetores \overline{UP} e \overline{RS} é 180° .

$$\text{Assim, } \overline{UP} \cdot \overline{RS} = \|\overline{UP}\| \times \|\overline{RS}\| \times \cos(180^\circ) = 3 \times 3 \times (-1) = -9$$

2.3.

Como o plano PQV tem equação $x + y = 2$, e como o ponto Q tem a abscissa e a cota iguais a 0, as coordenadas de Q são: $Q(0, 2, 0)$

O vetor diretor da reta é: $\overline{TQ} = Q - T = (0, 2, 0) - (0, 0, 3) = (0, 2, -3)$

Assim, uma condição cartesiana que define a reta TQ é $x = 0 \wedge \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{-3}$.

2.4.

O número de casos possíveis é dado por: 8C_3

Há 6 planos perpendiculares ao plano xOy . Os 4 planos que contêm as faces laterais do prisma e os dois planos que contêm as diagonais das bases do prisma.

Cada um destes planos contém 4 vértices do prisma:

Assim, o número de casos favoráveis é: $6 \times {}^4C_3$

A probabilidade pedida é: $\frac{6 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \frac{6 \times 4}{56} = \frac{3}{7}$

3.

Como a $P(\bar{A} \cup B)$ significa a probabilidade do número da bola retirada ser maior do que 6 ou ser par, então queremos a probabilidade do número da bola retirada ser 2, 4, 6, 7, 8, 9, ... ou seja, considerando o acontecimento contrário, queremos que a bola retirada não tenha os números 1, 3 e 5, pelo que: $P(\bar{A} \cup B) = 1 - \frac{3}{n} = \frac{n-3}{n}$

4.

4.1.

Temos que $f(0) = 9 - 2,5(e^{1-0,2 \times 0} + e^{0,2 \times 0 - 1}) = 9 - 2,5(e^1 + e^{-1}) \approx 1,28$

Assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\begin{aligned}\sqrt{1,28^2 + x^2} = 2 &\Leftrightarrow \left(\sqrt{1,28^2 + x^2}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow 1,28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1,28^2 \Leftrightarrow x^2 = 2,3616 \\ &\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2,3616}\end{aligned}$$

Como $x \in [0, 7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2,3616} \approx 1,5$.

Dado que $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$ e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{(f(0))^2 + x^2}$ é a distância \overline{SP} .

Assim, a solução da equação $\sqrt{(f(0))^2 + x^2} = 2$ é a abscissa do ponto S , na posição em que dista duas unidades do ponto P . O ponto S da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta o ponto P está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

4.2.


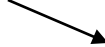
Começemos por determinar a expressão analítica da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(9 - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})\right)' = 9' - 2,5(e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})' = \\ &= 0 - 2,5\left((e^{1-0,2x})' + (e^{0,2x-1})'\right) = -2,5\left((1-0,2x)'(e^{1-0,2x}) + (0,2x-1)'(e^{0,2x-1})\right) = \\ &= -2,5(-0,2(e^{1-0,2x}) + 0,2(e^{0,2x-1})) = -2,5 \times 0,2(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = \\ &= -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) \end{aligned}$$

Calculemos os zeros da função derivada, no domínio da função:

$$\begin{aligned} -0,5(-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = 0 &\Leftrightarrow -e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-0,2x} = e^{0,2x-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - 0,2x = 0,2x - 1 \Leftrightarrow -0,4x = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{4} \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da função derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	min		Máx		min

Assim, conclui-se que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$\begin{aligned} f(5) &= 9 - 2,5(e^{1-0,2 \times 5} + e^{0,2 \times 5 - 1}) = 9 - 2,5(e^{1-1} + e^{1-1}) = 9 - 0,5(e^0 + e^0) = \\ &= 9 - 2,5 \times 2 = 9 - 5 = 4 \end{aligned}$$

Portanto, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

5.

5.1.

Para averiguar se a função g é contínua em $x=1$, temos que verificar se

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x):$$

- $g(1) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \frac{1-(1^-)^2}{1-e^{1-1^-}} = \frac{1-1}{1-e^0} = \frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2-1)}{-(e^{x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(e^{x-1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{(x-1)}{(e^{x-1}-1)} (x+1) \right) =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times (1^- + 1) = \\ &= \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{1} \times 2 = 2 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = 3 + \frac{\text{sen}(1-1)}{1-1} = 3 + \frac{0}{0}$ (indeterminação).

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{(x-1)} =$$

(fazendo $y = x - 1$, temos que se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$3 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen}(y)}{y}}_{\text{limite notável}} = 3 - 1 = 2$$

Como $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 1$.

5.2.

Para $x \in]4, 5[$ tem-se $g(x) = 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x}$ e $1-x \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} g(x) = 3 &\Leftrightarrow 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 0 \stackrel{1-x \neq 0}{\Leftrightarrow} \text{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, se:

- $k = 0$, então $x = 1$ e $1 \notin]4, 5[$;
- $k = 1$, então $x = 1 + \pi$ e $1 + \pi \in]4, 5[$;
- $k = 2$, então $x = 1 + 2\pi$ e $1 + 2\pi \notin]4, 5[$.

pelo que, o conjunto solução da equação é $\{1 + \pi\}$.

5.3.

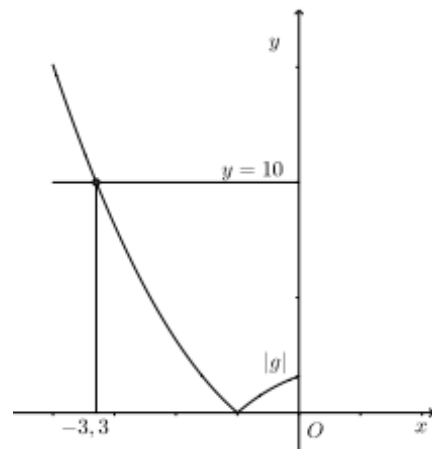
Como o ponto A é o ponto de abscissa negativa ($x < 1$) que é a interseção do gráfico da função g com o eixo das abscissas, tem ordenada nula, calculemos a abscissa resolvendo a equação seguinte:

$$\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} = 0 \stackrel{x \neq 1}{\Leftrightarrow} 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Dado que } x < 1, \text{ então } x = -1.$$

Assim, temos que $\overline{OA} = |-1| = 1$ e considerando o lado $[OA]$ como a base do triângulo $[OAP]$, a altura é o valor absoluto da ordenada do ponto P , pelo que a área do triângulo é igual a 5, se:

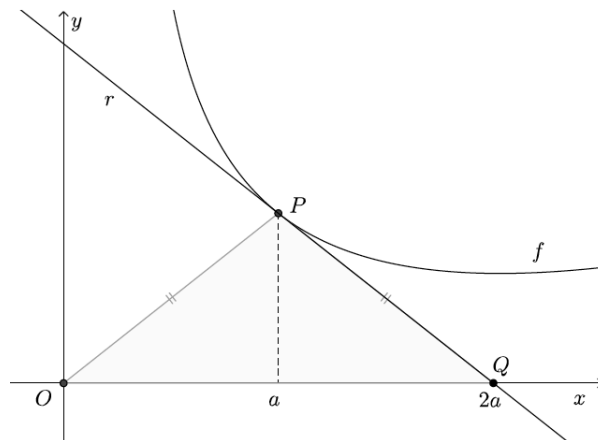
$$\frac{\overline{OA} \times |g(x)|}{2} = 5 \Leftrightarrow 1 \times |g(x)| = 5 \times 2 \Leftrightarrow |g(x)| = 10 \Leftrightarrow |g(x)| = 10 \Leftrightarrow \left| \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} \right| = 10$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $|g|$, para valores inferiores a 0 e a reta $y = 10$ (reproduzidos na figura ao lado), e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às décimas) da abscissa do ponto P , $x_p \approx -3,3$.



6.

Dado que $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$.



Como as coordenadas do ponto P são $(a, f(a))$ e as do ponto Q são $(2a, 0)$, temos que o declive da reta PQ , é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Tendo em conta que a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a , então o declive da reta r , ou seja, da reta PQ é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, vem que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$