

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 20 DE JULHO 2018**

CADERNO 1

1.

1.1. **P2001/2002**

Como se trata de uma distribuição normal temos que:

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545 .$$

Logo, sabendo que a distribuição normal é simétrica, vem: $P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2}$.

Assim, conclui-se que: $P(X > \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0,9545}{2}$, ou seja, $P(X > \mu - 2\sigma) \approx 0,977$.

A resposta correta é a opção (C).

1.2. **PMC2015**

Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , conclui-se que:

$$\hat{A}CB = 180^\circ - 57^\circ - 81^\circ \Leftrightarrow \hat{A}CB = 42^\circ .$$

Assim, aplicando a lei dos senos, temos que:

$$\frac{\text{sen}(42^\circ)}{\overline{AB}} = \frac{\text{sen}(81^\circ)}{5} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\text{sen}(42^\circ) \times 5}{\text{sen}(81^\circ)} \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 3,39 .$$

A resposta correta é a opção: (C)

2.

Seja B o acontecimento: “o atleta pratica basquetebol” e F o acontecimento: “o atleta pratica futebol”.

$$\text{Assim, } P(B) = \frac{1}{5}, P(F) = \frac{2}{5} \text{ e } P(\bar{B}|\bar{F}) = \frac{3}{4}.$$

Então,

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|\bar{F}) = \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{P(\bar{B} \cap \bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B \cup F})}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - P(B \cup F)}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - P(B) - P(F) + P(B \cap F)}{1 - P(F)} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5} + P(B \cap F)}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5} + P(B \cap F)}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5} + P(B \cap F) = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P(B \cap F) = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Como a probabilidade é diferente de zero existe pelo menos um atleta que pratica as duas modalidades.

3.

3.1.

Como os códigos têm de começar por uma vogal há 5 maneiras de escolher o primeiro carácter. Para cada uma destas, existem ${}^9A_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ maneiras de colocar os três algarismos diferentes escolhidos de entre os 9 indicados.

Assim, podem-se formar $5 \times {}^9A_3 = 5 \times 504 = 2520$ códigos diferentes nas condições do enunciado.

A resposta correta é a opção: **(D)**

3. 2.

Usando a Regra de Laplace, para determinar a probabilidade pedida, temos de calcular o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

O número total de códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres é igual a ${}^{14}A_4' = 14^4 = 38416$, pelo que o número de casos possíveis é 38416.

O produto dos algarismos de um número, com quatro algarismos diferentes, é um número ímpar se esses algarismos forem ímpares. Como existem cinco algarismos ímpares 1, 3, 5, 7 e 9, então o número de casos favoráveis é igual a ${}^5A_4 = 120$.

Assim, a probabilidade de um código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, é dada por: $p = \frac{120}{38416}$.

Então, a probabilidade pedida é $p \approx 0,003$.

4.

4. 1.

Pretende-se determinar uma equação cartesiana do plano que passe no ponto P e seja perpendicular à reta r .

Sendo P um ponto de coordenadas da forma $P(1, 3, z)$, com $z < 0$ que pertence à superfície esférica de equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$, vem:

$$\begin{aligned}(1 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10 &\Leftrightarrow 1 + (z + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z + 1 = 3 \vee z + 1 = -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = 2 \vee z = -4\end{aligned}$$

Assim, $P(1, 3, -4)$, pois a sua cota é negativa.

Um vetor normal ao plano pode ser um vetor diretor da reta r , por exemplo $\vec{r}(4, 1, -2)$.

O plano que passa por P e tem vetor normal $\vec{r}(4, 1, -2)$ é definido por uma equação da forma $4x + y - 2z + d = 0$, sendo d um número real.

Como P tem coordenadas $(1, 3, -4)$, tem-se:

$$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15.$$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa por P e é perpendicular à reta r é: $4x + y - 2z - 15 = 0$.

4.2.

O ângulo AOC é formado pelos vetores \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} .

Como o ponto C é o centro da superfície esférica, tem coordenadas $C(1, 2, -1)$. O ponto A , simétrico de C relativamente ao plano xOy , tem coordenadas $A(1, 2, 1)$.

Sendo α a amplitude do ângulo AOC , tem-se: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OC}\|}$.

Por outro lado, tem-se:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (1, 2, 1) - (0, 0, 0) = (1, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{OC} = C - O = (1, 2, -1) - (0, 0, 0) = (1, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = (1, 2, 1) \cdot (1, 2, -1) = 4$$

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad \|\overrightarrow{OC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Logo, } \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

Sendo $\alpha \in [0, 180]$ em graus, a amplitude do ângulo AOC , arredondado às unidades, é:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \alpha \approx 48^\circ.$$

Assim, a amplitude do ângulo AOC é aproximadamente 48° .

5.

No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α e a distância de Mercúrio ao

$$\text{Sol é } d(\alpha) = \frac{555}{10 - 2,06 \cos \alpha}.$$

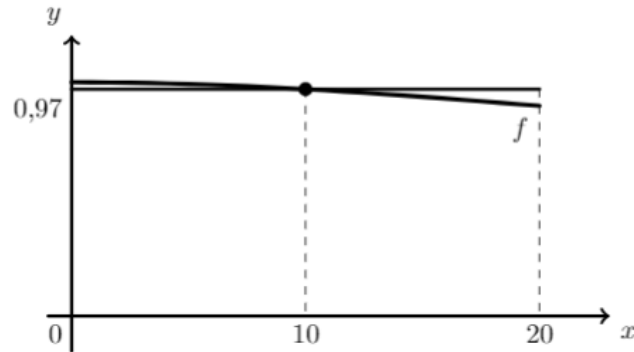
Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ASM é três vezes maior, ou seja,

$$3\alpha, \text{ e a distância respetiva é } d(3\alpha) = \frac{555}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)}. \text{ Além disso, sabemos que, neste}$$

segundo instante, a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, ou seja é igual a 97% da distância anterior. Assim:

$$\begin{aligned} d(3\alpha) = 0,97d(\alpha) &\Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)} = 0,97 \times \frac{555}{10 - 2,06 \cos \alpha} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{10 - 2,06 \cos \alpha}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)} = 0,97 \end{aligned}$$

Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, representamos, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20), o gráfico correspondente a $f(x) = \frac{10 - 2,06 \cos x}{10 - 2,06 \cos(3x)}$ e a reta horizontal de equação $y = 0,97$.



Usando a função da calculadora para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades do grau) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, $\alpha \approx 10^\circ$.

6.

Para calcular a abcissa do único ponto de inflexão começemos por determinar a expressão da segunda derivada da função f :

$$f''(x) = (3x - \operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Calculando os zeros da segunda derivada temos:

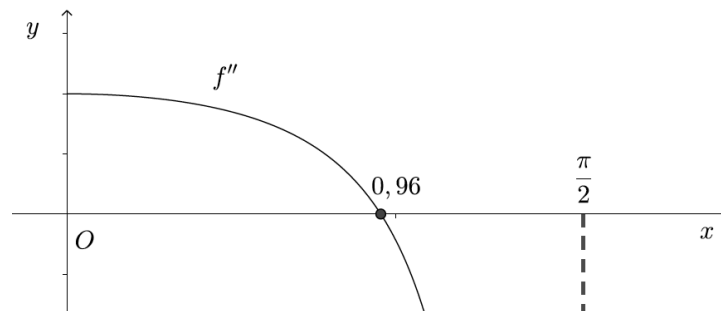
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Mas como a função está definida no intervalo $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ o $\cos x$ é positivo.

Logo, $\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, pelo que a amplitude do ângulo x , em radianos, arredondado às centésimas,

$$\text{é: } x = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \Rightarrow x \approx 0,96.$$

Como a segunda derivada tem um único zero neste intervalo e à esquerda deste valor a segunda derivada é positiva e à direita é negativa, como se pode observar no gráfico, então 0,96 é o valor pedido.



A resposta correta é a opção (D)

7.

Seja r , com $r \in \mathbb{R}$, a razão da progressão aritmética (u_n) . Assim, tem-se que:

$$\bullet u_3 = u_1 + 2r \Leftrightarrow u_1 = u_3 - 2r, \text{ como } u_3 = 4 \text{ vem } u_1 = 4 - 2r;$$

$$\bullet u_{12} = u_3 + 9r \Leftrightarrow u_{12} = 4 + 9r.$$

Portanto, como $S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12$, temos:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow \frac{4 - 2r + 4 + 9r}{2} \times 12 = 174 \Leftrightarrow (7r + 8) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 7r + 8 = \frac{174}{6} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Logo, como o termo geral da progressão aritmética (u_n) é dado por $u_n = u_3 + (n - 3) \times r$, vem que:

$$u_n = 4 + (n - 3) \times 3 = 4 + 3n - 9 = 3n - 5$$

Vejamus então se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $u_n = 5371$:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow 3n - 5 = 5371 \Leftrightarrow 3n = 5376 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Conclui-se que 5376 é o termo de ordem 1792 da progressão aritmética (u_n) .

8.

Os pontos A, B, C, D e E são afijos dos complexos que são as raízes quintas de um dado número complexo e pertencem à circunferência centrada na origem e de raio 1.

Os cinco respetivos argumentos estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{5}$.

Por hipótese, sabemos que C é o afixo do complexo $z_C = 1e^{i\pi}$.

Assim,

$$Arg(z_C) = Arg(z) + 2 \times \frac{2\pi}{5}$$

$$\pi = Arg(z) + \frac{4\pi}{5}$$

$$Arg(z) = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{Donde, } z = 1e^{i\frac{\pi}{5}}$$

Pela fórmula de Moivre, temos

$$z^5 = \left(1e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = (1)^5 e^{i \times 5 \times \frac{\pi}{5}} = 1e^{i\pi} = -1.$$

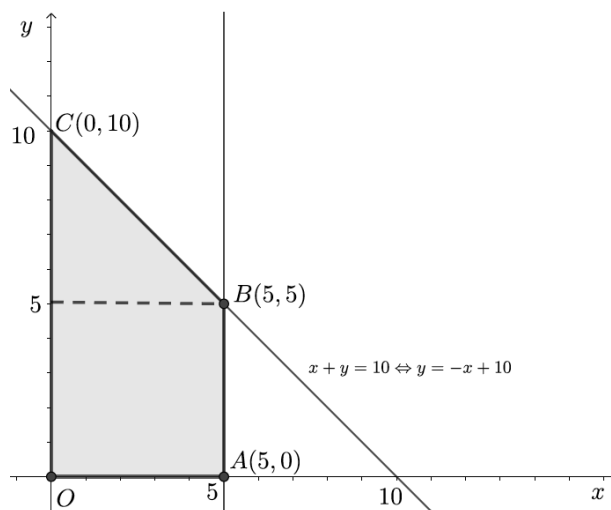
A resposta correta é a opção (A).

CADERNO 2

9.

9.1. P2001/2002

Começemos por representar a região D , região admissível deste problema de Programação Linear:



Fazendo $x = 0$ na equação $x + y = 10$, vem que $y = 10$, pelo que a reta de equação $x + y = 10$ intersecta o eixo Oy no ponto $C(0,10)$ e fazendo $x = 5$ na equação $x + y = 10$, vem que $y = 5$, pelo que as retas de equações $x + y = 10$ e $x = 5$ se intersectam no ponto $B(5,5)$.

Finalmente, para $L = 0$, tem-se que $0 = 3x + 5y \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x$, pelo que a reta de equação $y = -\frac{3}{5}x$ (reta de nível 0), não é paralela a nenhum dos lados do polígono $[OABC]$ e portanto a solução óptima deste problema é atingida num dos seus vértices (pretende-se maximizar a função objectivo).

Assim, calculando o valor da função objectivo para cada um dos vértices considerados, temos:

Vértice	$L = 3x + 5y$
$A(5,0)$	$L = 3 \times 5 + 5 \times 0 = 15$
$B(5,5)$	$L = 3 \times 5 + 5 \times 5 = 40$
$C(0,10)$	$L = 3 \times 0 + 5 \times 10 = 50$

Portanto, o valor máximo que a função objectivo alcança na região admissível dada pelo sistema é 50.

A resposta correta é a opção **(B)**

9.2. PMC2015

Tem-se que:

- $\overline{F_1F_2} = 2c$ (distância focal), pelo que $\overline{F_1F_2} = 12 \Leftrightarrow 2c = 12 \Leftrightarrow c = 6$
- $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (eixo maior), pelo que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20 \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = 10$
- $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = 64$

A equação reduzida da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo a o semi-eixo maior e b o semi-

eixo menor. Assim, como $a^2 = 100$ e $b^2 = 64$, a equação reduzida da elipse da figura é

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

A resposta correta é a opção **(B)**

10.

Começemos por simplificar z ,

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} \Leftrightarrow z = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^3 \Leftrightarrow z = \frac{4-4i-1+1+i}{1-2i} - 3i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4-3i}{1-2i} - 3i \Leftrightarrow z = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{4+8i-3i-6i^2}{1-4i^2} - 3i \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{10+5i}{1+4} - 3i \Leftrightarrow z = 2+i-3i \Leftrightarrow z = 2-2i \end{aligned}$$

Assim, $-\frac{1}{2} \times \bar{z} = -\frac{1}{2} \times (2+2i) = -1-i$.

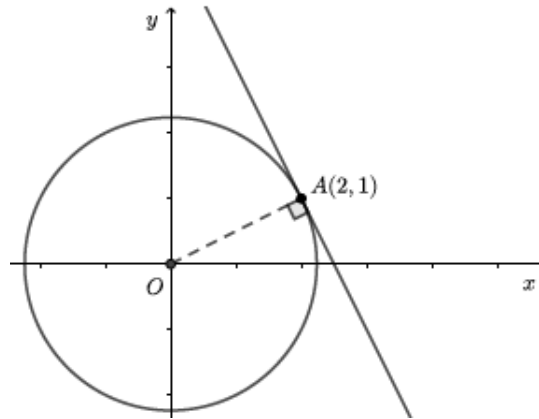
Escrevendo $-1-i = w$ na forma trigonométrica, temos que $w = -1-i = r e^{i\theta}$, onde:

- $r = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$, como o afixo de $-1-i$ pertence ao 3º Q., θ pertence ao 3º Q..

Logo, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e $w = \sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$.

11.

A reta r é tangente à circunferência de centro na origem no ponto A , pelo que é perpendicular à recta OA :



Como $\overrightarrow{OA} = A - O = (2, 1) - (0, 0) = (2, 1)$, então o declive da reta OA é $m_{OA} = \frac{1}{2}$ e

portanto o declive da reta r é dado por $m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Logo, uma equação da reta r será $y = -2x + b$, sendo b a ordenada na origem.

Como o ponto A também pertence à reta r , substituindo na sua equação, obtém-se o valor de b , ou seja, $1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$.

A resposta correta é a opção **(B)**

12.

12. 1. **P2001/2002**

Fazendo a intersecção dos três planos, vem que:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = z \\ 2(-y) + 3y - y - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = z \\ -2y + 2y - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ y = z \\ -1 = 0, \text{ proposição falsa} \end{array} \right.$$

o sistema é impossível de onde se conclui que a intersecção dos três planos é o conjunto vazio.

A resposta correta é a opção **(D)**

12. 2. **PMC2015**

Tem-se que:

$$\lim \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim \left[\frac{\left(n \left(1 + \frac{5}{n} \right) \right)^n}{\left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^n} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\lim \frac{\left(1 + \frac{5}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{5-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^4 \right)^{\frac{1}{2}} = e^2$$

A resposta correta é a opção **(D)**

13.

Comecemos por determinar o domínio onde é válida a inequação:

$$D = \{ x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge 8-x > 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x < 8 \} = \\ = \{ x \in \mathbb{R} : -1 < x < 8 \} =]-1, 8[$$

Resolvendo a inequação, temos que:

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq \log_2(2^3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_2((x+1)(8-x)) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0$$

Como $7x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7-x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 7$, temos que:

x	-1		0		7		8
x	n. d.	-	0	+	+	+	n. d.
$7-x$	n. d.	+	+	+	0	-	n. d.
$7x-x^2$	n. d.	-	0	+	0	-	n. d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são solução da inequação é: $]-1, 0] \cup [7, 8[$.

14.

14.1.

Tem-se que: $f(0) = 3 + \frac{e^0}{1-0} = 3 + \frac{1}{1} = 3 + 1 = 4$, pelo que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x}{1-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^x - 1 + x}{x(1-x)}}_{\text{indeterminação}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(1-x)} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(1-x)} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 \times \frac{1}{1-0} + \frac{1}{1-0} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

De onde se conclui que a derivada da função f no ponto de abcissa 0 é 2.

14.2.

Determinemos:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x} \right) = 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} = \\ &= 3 + \frac{0}{1+\infty} = 3 + \frac{0}{+\infty} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Logo, reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} + \frac{2}{+\infty} = 2 \times 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo, reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

14.3.

Tem-se que: $(f \circ h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2))$.

Assim, $h(x) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ logo $h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$. Dado que h é bijetiva então admite inversa.

$$\text{Logo, } (f \circ h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2)) = f(1) = \frac{\ln(1^2) + 2}{1} = \ln 1 + 2 = 0 + 2 = 2.$$

A resposta correta é a opção (C)

15.

Para calcular o declive da reta tangente, que tem o declive máximo temos que determinar o valor para o qual a derivada é máxima. Para o efeito começemos por determinar a expressão da segunda derivada da função, bem como os seus zeros elaborando de seguida um quadro de sinal.

$$g(x) = 2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x$$

$$g'(x) = (2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x)' = 2\cos x + 2\operatorname{sen}x \cos x$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= (2\cos x + 2\operatorname{sen}x \cos x)' = 2(-\operatorname{sen}x) + 2\cos x \cos x + 2\operatorname{sen}x(-\operatorname{sen}x) = \\ &= -2\operatorname{sen}x + 2\cos^2x - 2\operatorname{sen}^2x = -2\operatorname{sen}x + 2(1 - \operatorname{sen}^2x) - 2\operatorname{sen}^2x = \\ &= -2\operatorname{sen}x + 2 - 2\operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}^2x = -4\operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}x + 2 \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada:

$$-4\operatorname{sen}^2x - 2\operatorname{sen}x + 2 = 0$$

Considerando $\operatorname{sen}x = y$ temos:

$$-4y^2 - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-8} \Leftrightarrow y = \frac{2 \pm 6}{-8} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ou seja, } \operatorname{sen}x = -1 \vee \operatorname{sen}x = \frac{1}{2}.$$




Mas, como o domínio da função é $[0, \pi]$ só consideramos os valores em que o seno é positivo.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretendem os valores pertencentes ao intervalo $[0, \pi]$ vamos atribuir valores inteiros a k .

$$\text{Para } k = 0 \text{ vem } x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$$

Estudando a variação do sinal da função derivada de segunda ordem e relacionando-o com a monotonia da função derivada de primeira ordem, temos:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f''(x)$	2	+	0	-	0	+	2
$f'(x)$	Min		Máx		Min		Máx

A função derivada tem dois máximos relativos. Calculando os seus valores temos:

$$g'(\pi) = 2\cos \pi + 2\operatorname{sen} \pi \cos \pi = 2 \times (-1) + 2 \times 0 \times (-1) = -2$$

$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Logo o valor do declive da reta que tem o declive máximo é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.