PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2019

1.

1.1. Na calculadora gráfica, preenchemos as listas L1 e L2, como a seguinte tabela sugere.

L1	L2
0	1700
1	1710
2	2008
3	2600
5	3485
6	4500
7	5250
9	5470
10	6080
12	6750
13	6890
14	7000
17	7630
18	7545
20	7485

Selecionamos a opção *Logistic*, no separador *Calc* do menu *STAT*, sendo:

- XList: L1
- YList: L2

Obtemos os seguintes resultados, arredondados às milésimas:

- $a = 4{,}399$
- $b = 0{,}285$
- $c = 7689{,}213$

Pelo que o modelo logístico, correspondente aos dados, desta população de focas é

$$y = \frac{7689{,}213}{1 + 4{,}399e^{-0{,}285x}}$$

O início de 1986 corresponde a $x = 11$
Recorrendo ainda à calculadora gráfica:

- definimos a função Y_1

$$Y_1 = \frac{7689{,}213}{1 + 4{,}399e^{-0{,}285x}}$$

- calculamos o valor deY_1 quando $x = 11$

Resposta: Com base neste modelo logístico o número de focas existentes no início do ano de 1986 é estimado em 6454.

1.2. De acordo com os dados podemos construir a seguinte tabela:

t	$F(t)$= nº de focas em:
0	01/01/1980
1	01/01/1981
2	01/01/1982
3	01/01/1983
4	01/01/1984
5	01/01/1985

Como $t = 2$ corresponde a 01/01/1982 e $t = 5$ corresponde a 01/01/1985, então

$$TVM_{[2,5]} = 647$$

representa a taxa de varação média, entre as zero horas do dia 1 de janeiro de 1982 e as zero horas do dia 1 de janeiro de 1985 que nos mostra a forma como aumentou (porque é positiva) a população de focas.

Resposta: No período compreendido entre as zero horas do dia 1 de janeiro de 1982 e as zero horas do dia 1 de janeiro de 1985 a população de focas teve um crescimento médio de 647 animais por ano.

2.

2.1. 60 kg de ração do tipo A corresponde a 60 euros de lucro.

$$150 - 60 = 90$$

Como o lucro da ração do tipo B é de 2 euros por cada quilograma $90 \div 2 = 45$

Assim, teriam que ser vendidos 45 kg de ração do tipo B para que nesse dia o lucro fosse de 150 €. . Porém 60+45=105 kg, o que ultrapassa a carga máxima que a carrinha pode transportar.

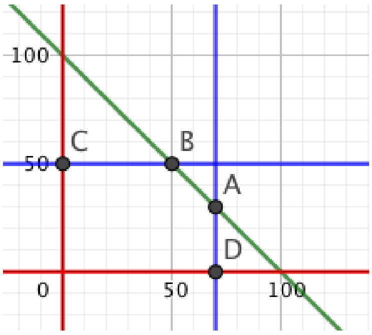
Resposta: Nesse dia o lucro não pode ser de 150 euros.

2.2. Seja x o número de quilogramas de ração do tipo A vendida diariamente e, seja y o número de quilogramas de ração do tipo B vendida diariamente.

A função objetivo que pretendemos maximizar é $f(x, y) = x + 2y$

As restrições do problema são: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 70 \\ y \leq 50 \\ x + y \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 70 \\ y \leq 50 \\ y \leq -x + 100 \end{cases}$

Construamos a região das soluções admissíveis:



Determinemos agora as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, e averiguemos qual a solução ótima:

(x, y)	$f(x, y) = x + 2y$
$A(70,30)$	$f(70,30) = 70 + 2 \times 30 = 130$
$B(50,50)$	$f(50,50) = 50 + 2 \times 50 = 150$
$C(0,50)$	$f(0,50) = 0 + 2 \times 50 = 100$
$D(70,0)$	$f(70,0) = 70 + 0 = 70$

← <u>Solução ótima</u>

Resposta: A família deve vender diariamente 50kg de ração do tipo A e 50 kg do tipo B de forma a obter o lucro máximo diário de 150 euros.

3.

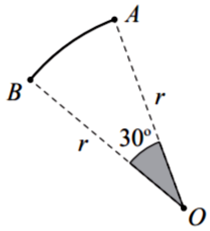
3.1. Dado que $r = 12$ e $tg\,(\theta) = \frac{6}{r}$, com $0° < \theta < 90°$, temos que:

$tg\,(\theta) = \frac{6}{12} \Leftrightarrow tg\,(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \theta \approx 26{,}565\ldots$

Resposta: $\theta = 26{,}6°$.

3.2.

,



Podemos encontrar uma expressão para o comprimento do arco AB em função do raio r, através de uma regra de três simples:

$$\begin{array}{l} 360^\circ - 2\pi r \\ 30^\circ \;\; - \;\; \overset{\frown}{AB} \end{array} \quad \to \quad AB = \frac{30^\circ \times 2\pi r}{360^\circ} \quad \Leftrightarrow \quad AB = \frac{\pi r}{6}$$

Como $\theta = 45°$, vem que $tg\ 45° = \frac{6}{\text{r}} \Leftrightarrow r = 6$

Assim temos que $AB = \frac{\pi \times 6}{6} = \pi$

Resposta: O comprimento do arco descrito pelo pássaro é, aproximadamente, 3,14 m.

4.

4.1. A altura do poste P é dada por $h(0)$ e, como o poste Q está 12 metros à direita do poste P a sua altura é dada por $h(12)$.

Na calculadora gráfica, podemos definir a função

$$Y_1 = 4(e^{0,125x-0,75} + e^{-0,125x+0,75})$$

No menu TABLE consultamos a tabela que caracteriza esta função

X	Y_1
0	10.357
1	9.614
2	9.021
3	8.5691
4	8.2513
5	8.0626
6	8
7	8.0626
8	8.2513
9	8.5691
10	9.021
11	9.614
12	10.357

Nota
Definindo, no menu TABLESET

- $TblStart = 0$
- $\Delta Tbl = 6$

A tabela puderia ser, p.e.

X	Y_1
0	10.357
6	8
12	10.357

Da análise da tabela verifica-se que as imagens de 0 e de 12 são idênticas, o que significa que $h(0) = h(12)$

Resposta: Como $h(0) = h(12)$ os postes P e Q têm a mesma altura.

<u>Outro processo:</u>

Podemos determinar

$h(0) = 4\left(e^{-0,75} + e^{0,75}\right)$ e

$h(12) = 4\left(e^{1,5-0,75} + e^{-1,5+0,75}\right) = 4\left(e^{0,75} + e^{-0,75}\right) = 4\left(e^{-0,75} + e^{0,75}\right)$,

concluindo que $h(0) = h(12)$.

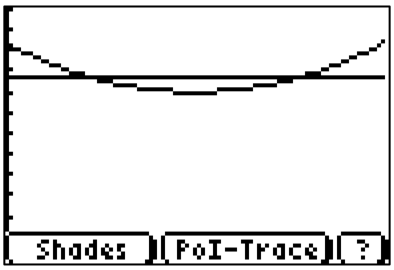
4.2. No menu funções, da calculadora gráfica definem-se as funções

- $Y_1 = 4(e^{0,125x-0,75} + e^{-0,125x+0,75})$
- $Y_1 = 8,7$

Com a seguinte janela de visualização

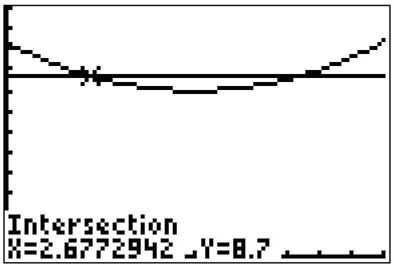
Xmin=0
Xmax=12
Xscl=2
Ymin=0
Ymax=12
Yscl=2

Obtemos os gráficos:



Verifica-se que os gráficos se intersetam em dois pontos.

Determinamos as coordenadas do ponto de intersecção dos gráficos, de menor abcissa, obtendo $x = 2.6772942$ $\quad y = 8.7$:



Como $12 - 2{,}7 = 9{,}3$

Chegamos à resposta.

Resposta: O pássaro dista 9,3 metros do poste Q.

5.

5.1. Seja a o número de andorinhas com mais de dois anos e seja b o número de andorinhas com menos de dois anos. Sabemos que $a > b$.

Então, como a e b estão em progressão geométrica:

$$\begin{cases} a+b=121 \\ b=\frac{3}{8}\times a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=121 \\ b=\frac{3}{8}\times a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=121-b \\ b=\frac{3}{8}\times(121-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=121-b \\ b+\frac{3}{8}b=\frac{363}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=121-b \\ 11b=363 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=121-b \\ b=363\div 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=121-33 \\ b=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=88 \\ b=33 \end{cases}$$

Resposta: O número de andorinhas com mais de dois anos é 88 e com menos de dois anos é 33.

5.2. Seja (v_n) a sucessão em que cada termo corresponde ao número de andorinhas que levanta voo na vez n. Sabemos que $v_n = 2n-1$

Sabemos assim que $v_1 = 2\times1-1=1$ e que todas as andorinhas levantaram voo quando $S_n = 121$, sendo S_n a soma de n termos de (v_n), que é uma progressão aritmética (sucessão dos números ímpares $1, 3, 5, 7, ...$). Então:

$$\frac{v_1+v_n}{2}\times n = 121 \Leftrightarrow (1+2n-1)\times n = 121\times 2 \Leftrightarrow 2n^2 = 121\times 2 \Leftrightarrow \underset{(n>0)}{n = \sqrt{121}} \Leftrightarrow n = 11$$

Resposta: São necessárias 11 vezes para que todas as andorinhas levantem voo

6.

A variável aleatória X pode tomar os valores 0, 1, ou 2

$P(X=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ (probabilidade de saírem dois cartões de zonas naturais)

$P(X=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}+\frac{6}{20}=\frac{6}{10}$ (probabilidade de saír um cartão de zona urbana seguido de um de zona natural ou vice-versa)

$P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ (probabilidade de saírem dois cartões de zonas urbanas)

Outro processo

Uma tabela de dupla entrada pode representar a experiência, que consiste em retirar ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois desses cinco cartões, registando-se a respetiva probabilidade da espécie de andorinha que figura em cada um dos cartões.

	Urbanas	**Naturais**
Urbanas	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\mathbf{\frac{3}{10}}$
Naturais	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{3}{10}}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\mathbf{\frac{3}{10}}$

Observando a tabela concluímos que:

$P(X=0)=\frac{3}{10}$; $P(X=1)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{6}{10}$; $P(X=2)=\frac{1}{10}$

Resposta: A tabela de distribuição de probabilidade é:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,3	0,6	0,1

7.

Como as andorinhas estão dispostas de forma a corresponderem aos vértices de um hexágono regular podemos afirmar que os ângulos $B\hat{C}H$ e $D\hat{C}H$ têm de amplitude $60°$. Assim o ângulo concâvo em C tem de amplitude $240°$. $(360° - 60° - 60°)$

A rotação de $-660°$ inclui $360° + 300°$, isto é, uma volta completa mais $300°$, no sentido negativo.

Como $300° = 360° - 60°$ temos por isso:

Resposta: O transformado do ponto H será o ponto B.

8.

Com base no gráfico de barras da Figura 9, é possível construir a seguinte tabela de frequência absolutas simples:

diâmetro	Frequência absoluta (f_a)
2,00	669
2,30	603
2,80	841
3,30	31
4,30	194
5,25	184
Total	2522

Recorrendo às capacidades da calculadora editamos duas listas, L1 (valores dos diâmetros) e L2, (valores de f_a) com todos os dados fornecidos e procuramos de seguida os valores de $\bar{x}$ e s, obtendo $\bar{x} = 2{,}77$ e $s = 0{,}92$.

Assim, temos que $]\bar{x} - s;\ \bar{x} + s[=]2{,}77 - 0{,}92;\ 2{,}77 + 0{,}92[=]1{,}85; 3{,}69[$

De um total de 2522 anilhas existem 378 (194+184) cujo diâmetro está fora deste intervalo, ou seja, as anilhas cujos diâmetros medem 4,3 mm e 5,25 mm, respetivamente.

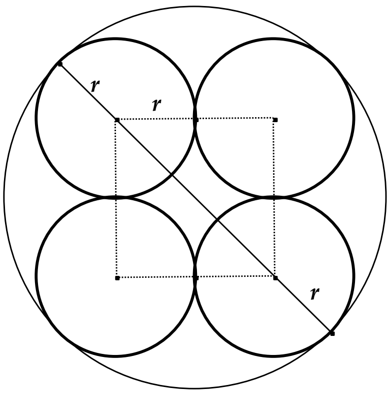
Assim, a percentagem de anilhas utilizadas cujo diâmetro não pertence ao intervalo $]1{,}85; 3{,}69[$ é dada pelo quociente $\frac{378}{2522} \approx 0{,}149 \ldots$

Resposta: Há 15% de anilhas utilizadas cujo diâmetro não pertence ao intervalo $]1{,}85; 3{,}69[$.

9.

As quatro anilhas dispostas como ilustra a figura do enunciado definem um quadro de lado igual a $2r$ sendo r a medida do raio de cada anilha, isto é $r = 10{,}5 \div 2 = 5{,}25$.

A caixa cilíndrica terá um diâmetro cujo comprimento corresponde à diagonal do quadrado acrescido de $r + r = 2r$ como mostra o esquema seguinte:



O diâmetro da caixa é então :

$d = \sqrt{10{,}5^2 + 10{,}5^2} + 2 \times 5{,}25 = \sqrt{220{,}5} + 10{,}5 = 14{,}8492 + 10{,}5 \approx 25{,}3492$

e o seu raio é, aproximadamente, $R = 25{,}3492 \div 2 = 12{,}6746$

Desta forma, a área lateral da caixa é $A_L = 10{,}3 \times \underbrace{2 \times \pi \times R}_{\text{perímetro da caixa}} \approx 10{,}3 \times 2 \times \pi \times 12{,}6746 \approx 820{,}2597$

A base da caixa tem de área $A_B = \pi \times R^2 = \pi \times 12{,}6746^2 \approx 504{,}6827$

A área total de papel autocolante é $A_L + A_B = 820{,}2597 + 504{,}6827 \approx 1324{,}9424 \text{ mm}^2$

Resposta: A área total de papel autocolante corresponde a 13,2 cm^2