REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1
6 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3,-1,2)$

1.1. Determine a amplitude do ângulo VAC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

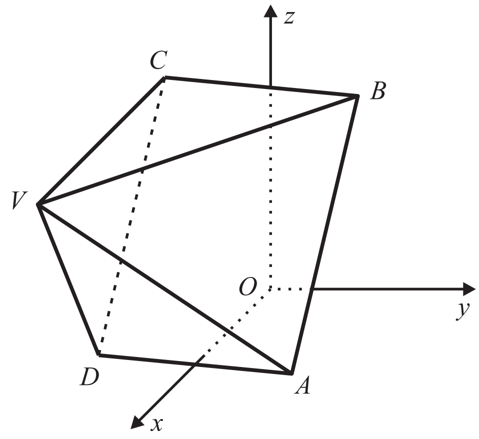

Figura 1

1.2. Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

2.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 2.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 2.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

2.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 5 e desvio padrão $\frac{1}{2}$

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > 6)$?

(A) $0{,}046$ **(B)** $0{,}042$ **(C)** $0{,}023$ **(D)** $0{,}021$

PMC2015

2.2. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ **(B)** e^3 **(C)** $\frac{1}{e^6}$ **(D)** e^6

3. Uma caixa contém bolas de várias cores, indistinguíveis ao tato, umas com um logotipo desenhado e outras não. Das bolas existentes na caixa, dez são amarelas. Dessas dez bolas, três têm o logotipo desenhado.

3.1. Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Sabe-se que a probabilidade de ela não ser amarela ou de não ter um logotipo desenhado é igual a $\frac{15}{16}$

Determine o número de bolas que a caixa contém.

3.2. Dispõem-se, ao acaso, as dez bolas amarelas, lado a lado, em linha reta.

Qual é a probabilidade de as três bolas com o logotipo desenhado ficarem juntas?

(A) $\frac{1}{16}$ **(B)** $\frac{1}{15}$ **(C)** $\frac{1}{14}$ **(D)** $\frac{1}{13}$

4. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7

Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.

5. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.

Figura 2

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.

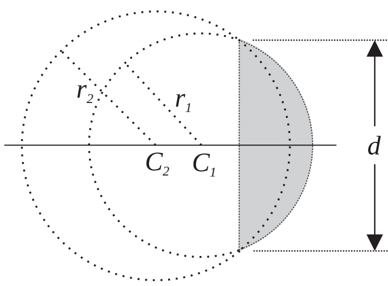

Figura 3

Seja $x = \overline{C_1C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (r_1 - r_2)^2\right]}}{x}, \quad \text{com} \quad r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em $9\ \text{mm}$ a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1\,,\sqrt{r_2^2 - r_1^2}\right[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = -1 + 2i$

Seja θ o menor argumento positivo do número complexo $\overline{z}$ (conjugado de z).

A qual dos intervalos seguintes pertence θ?

(A) $\left]0\,,\frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\pi\,,\frac{5\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{2}\right[$

7. Seja r um número real maior do que 1

Sabe-se que r é a razão de uma progressão geométrica de termos positivos.

Sabe-se ainda que, de dois termos consecutivos dessa progressão, a sua soma é igual a 12 e a diferença entre o maior e o menor é igual a 3

Determine o valor de r

8. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$

Sabe-se que $a + b = 2(a - b)$

Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln\left(a^2 - b^2\right) - 2\ln\left(a + b\right)$?

(A) $0{,}7$ **(B)** $1{,}4$ **(C)** $-0{,}7$ **(D)** $-1{,}4$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
12	12	8		13	8	12	12	8	12	8	**105**

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ, definidos pelas equações $x+y+z=1$, $2x+2y+2z=1$ e $x+y=0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) o conjunto vazio. **(B)** um ponto. **(C)** uma reta. **(D)** um plano.

PMC2015

9.2. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma elipse e um círculo, ambos centrados na origem do referencial. Os focos da elipse, F_1 e F_2, pertencem ao eixo Ox

Sabe-se que:

- a distância focal e o eixo menor da elipse são iguais ao diâmetro do círculo;
- a área do círculo é igual a 9π

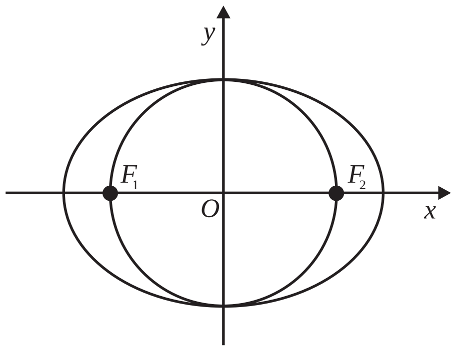

Figura 4

Qual das equações seguintes é a equação reduzida da elipse?

(A) $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$ **(B)** $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{9}=1$

(C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{20}=1$ **(D)** $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{18}=1$

10. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1=3+4i$ e $z_2=4+6i$

Seja $w=\dfrac{z_1+i^6+2\overline{z_1}}{z_1-z_2}$

No plano complexo, a condição $|z|=|w| \wedge \operatorname{Im}(z)\geq 0 \wedge \operatorname{Re}(z)\geq 0$ define uma linha.

Determine o comprimento dessa linha.

11. Qual é a solução da equação $2\cos x + 1 = 0$ no intervalo $[-\pi, 0]$?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ **(B)** $-\frac{2\pi}{3}$ **(C)** $-\frac{\pi}{3}$ **(D)** $-\frac{\pi}{6}$

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Um dado cúbico equilibrado tem uma face numerada com o número -1 e cinco faces numeradas com o número 1

Lança-se este dado duas vezes.

Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nos dois lançamentos».

Qual é o valor de k para o qual $P(X = k) = \frac{5}{18}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** -2 **(D)** -1

PMC2015

12.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica, no intervalo de tempo $I = [0, 10]$ (medido em segundos), de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3\cos\left(\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, com $t \in I$

Qual é o período, em segundos, deste oscilador harmónico?

(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 2π **(D)** 3π

13. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\\ \dfrac{x}{x-\ln x} & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

13.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1

13.2. Averigue se a função f é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

14. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

14.1. Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

14.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=g(x)+2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** e **(D)** e^2

15. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos A e B, de abcissas positivas, e as retas OB e r

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- a reta OB é definida pela equação $y=\dfrac{4}{3}x$
- a reta r contém a bissetriz do ângulo AOB

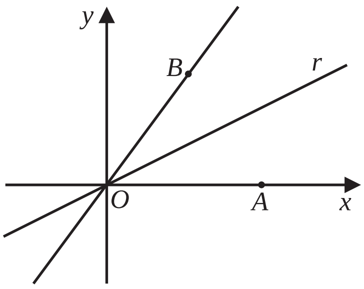

Figura 5

Determine a equação reduzida da reta r

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
9.1.	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.1.**	**14.2.**	**15.**	
8		13	8	8		13	14	13	8	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

Prova 635

1.ª Fase

CADERNO 2