REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

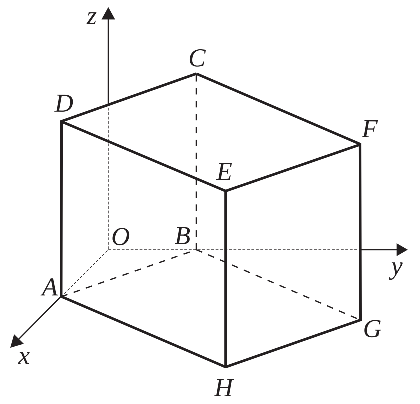

Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- o vértice C tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6,11,0)$
- o plano ABC é definido pela equação $3x+4y-12=0$

1.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$

1.2. Seja P o ponto de coordenadas $(1,-4,3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC

1.3. Escolhe-se, ao acaso, um vértice do paralelepípedo e, seguidamente, também ao acaso, escolhe-se um outro vértice, diferente do anterior.

Designe-se por X o primeiro vértice escolhido e por Y o segundo vértice escolhido.

Qual é a probabilidade de a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser igual a zero?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

2.1. Relativamente aos alunos desta escola, sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos alunos do 10.º ano são rapazes;
- $\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes;
- $\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2.2. Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.

O delegado de turma é um rapaz.

Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.

Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195 **(B)** 215 **(C)** 235 **(D)** 255

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 3.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 3.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

3.1. Uma caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

(A) $0{,}9$ **(B)** $0{,}8$ **(C)** $0{,}7$ **(D)** $0{,}6$

3.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6

Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas?

(A) $0{,}989$ **(B)** $0{,}992$ **(C)** $0{,}995$ **(D)** $0{,}998$

4. O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I, medida em microwatt por metro quadrado $(\mu\mathrm{W/m^2})$, de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10\log_{10} I, \quad \text{com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150\ \mu\mathrm{W/m^2}$, o seu nível passa a ser $1{,}4\%$ do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20{,}80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu\mathrm{W/m^2}$, arredondado às unidades.

5. Para um certo número real k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 9

6. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.

Sabe-se que 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabe-se ainda que $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Determine a e b

7. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$

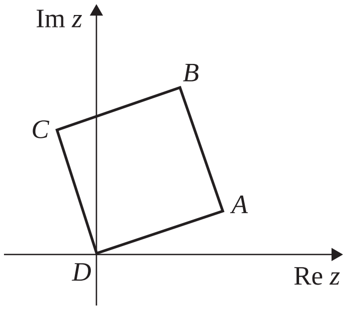

Figura 2

Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B ?

(A) $z(1+i)$ **(B)** iz **(C)** $i^3 z$ **(D)** $z(2+i)$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	
12	12	12	13	8	8		12	8	12	8	**105**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

6 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\,\overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Na Figura 3, está representada a região admissível de um problema de Programação Linear.

Esta região corresponde ao sistema $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 150 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 400 \end{cases}$

Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 2x + y$, pode alcançar nesta região?

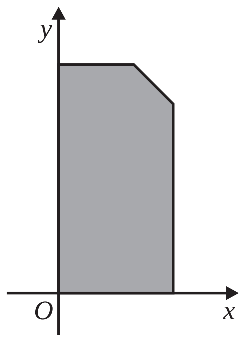

Figura 3

(A) 450 **(B)** 500 **(C)** 550 **(D)** 600

PMC2015

9.2. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(C)** 0 **(D)** 1

10. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a reta AB

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$

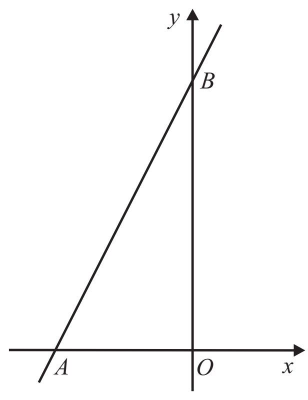

Figura 4

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Quais são as coordenadas do ponto M ?

(A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ **(B)** $(-1, 2)$

(C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **(D)** $(-2, 4)$

11.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 11.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 11.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

11.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r ?

(A) $\vec{a}\,(2, 4, 1)$ **(B)** $\vec{b}\,(-3, 1, 0)$

(C) $\vec{c}\,(1, 1, 2)$ **(D)** $\vec{d}\,(-4, 2, 0)$

PMC2015

11.2. Qual é, para qualquer número real positivo a, o limite da sucessão $\left(\frac{n + \ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 **(B)** $2a$ **(C)** a **(D)** $\sqrt{a}$

12. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $h(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

12.1. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

12.2. Resolva, em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, a equação $(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3$

13. Seja g a função definida em $]0,\pi[$ por $g(x)=\dfrac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$

13.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

13.2. Seja f a função, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função f ?

(A) $\operatorname{sen} x+\cos x$

(B) $-\operatorname{sen} x-\cos x$

(C) $\operatorname{sen} x-\cos x$

(D) $-\operatorname{sen} x+\cos x$

14. Na Figura 5, está representado o gráfico da função f, definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$

Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f

Para cada posição do ponto P, seja:

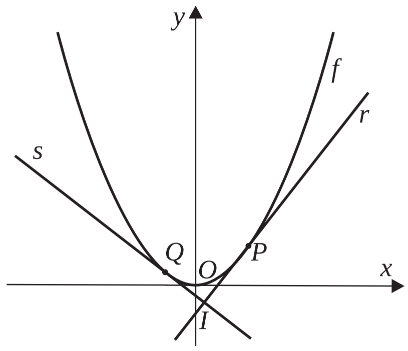

Figura 5

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f
- I o ponto de intersecção das retas r e s

Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$

Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por a

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**12.1.**	**12.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**14.**	
13	8		8	8		14	13	13	8	10	**95**

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 2