mathniversity®
promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635)

2ª FASE – 22 DE JULHO 2019

1.

1.1.

O volume do paralelepípedo é dado, por exemplo, por: $V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC}$.

Sabe-se que $A \in Ox$ e $B \in Oy$, pelo que $A(a,0,0)$ e $B(0,b,0)$, com $a,b \in \mathbb{R}$.

Como A pertence ao plano ABC temos:

$$3a + 4 \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3a = 12 \Leftrightarrow a = \frac{12}{3} \Leftrightarrow a = 4$$, logo $A(4,0,0)$.

Do mesmo modo como B também pertence ao plano ABC, então

$$3 \times 0 + 4 \times b - 12 = 0 \Leftrightarrow 4b = 12 \Leftrightarrow b = \frac{12}{4} \Leftrightarrow b = 3$$, logo $B(0,3,0)$.

Assim,

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 ;$$

$$\overline{BG} = \sqrt{(6-0)^2 + (11-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 ;$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{6^2} = 6 .$$

Então, o volume do paralelepípedo é dado por:

$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} = 5 \times 10 \times 6 = 300$ unidades de volume.

1.2.

Se r passa por P e é perpendicular a ABC, temos que $(3,4,0)$ são as coordenadas de um vetor diretor da reta r.

Assim, uma equação vetorial de r é, por exemplo: $(x,y,z)=(1,-4,3)+k(3,4,0),\ k\in\mathbb{R}$.

Daqui obtemos o seguinte sistema de equações paramétricas: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=-4+4k,\ k\in\mathbb{R} \\ z=3+0 \end{cases}$.

Intersetando r com ABC vem

$$3(1+3k)+4(-4+4k)-12=0 \Leftrightarrow 3+9k-16+16k-12=0 \Leftrightarrow 25k=25 \Leftrightarrow k=\frac{25}{25} \Leftrightarrow k=1.$$

Tomando $k=1$, vem $\begin{cases} x=1+3\times 1 \\ y=-4+4\times 1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}$.

Concluímos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são $(4,0,3)$

1.3.

Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2=28$.

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2+{}^{4}C_2=6+6=12$.

A probabilidade pedida é $P=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$.

2.

2.1.

Seja A o acontecimento : “Ser Rapaz”.

Seja B o acontecimento : “Frequentar o 10.º ano”.

Sabemos que:

$$P(A|B)=\frac{3}{5}\ ,\ P(A)=\frac{11}{21}\ \text{ e }\ P(A\cap B)=\frac{1}{7}.$$

Ora, $P(A|B)=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{7}}{P(B)}=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}}=P(B) \Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{21}$.

Queremos determinar o valor de:

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{11}{21}-\frac{5}{21}+\frac{1}{7}=\frac{21-11-5+3}{21}=\frac{8}{21}\approx 0{,}38$$

A probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano é $0{,}38$.

2.2.

A turma de 26 alunos tem 15 raparigas e 11 rapazes.

Como o delegado de turma, que é rapaz, tem que pertencer à comissão, vamos considerar 15 raparigas e 10 rapazes para constituir comissões mistas de dois elementos.

Assim, temos que considerar dois casos:

- Comissões constituídas por um rapaz e uma rapariga (e o delegado):

  Neste caso temos ${}^{10}C_1 \times {}^{15}C_1 = 10 \times 15 = 150$ comissões possíveis.

- Comissões constituídas duas raparigas:

Como o delegado pertence à comissão, esta continua a ser mista se escolhermos duas raparigas.

Neste caso temos ${}^{15}C_2 = 105$ comissões possíveis.

Desta forma, há $150 + 105 = 255$ comissões diferentes que se podem formar.

A resposta correta é a opção (D).

3.

3.1. P2001/2002

Retirando-se duas bolas da caixa ao acaso e em simultâneo, o número de bolas brancas retiradas poderá ser: duas, uma ou zero. Assim, a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória *X* "número de bolas brancas retiradas" é:

x_i	0	1	2
$P\left(X = x_i \right)$	$\frac{{}^{3}C_2}{{}^{5}C_2} = \frac{3}{10}$	$\frac{{}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1}{{}^{5}C_2} = \frac{6}{10}$	$\frac{{}^{2}C_2}{{}^{5}C_2} = \frac{1}{10}$

Logo, o valor médio da variável aleatória *X* é:

$$\mu = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

A resposta correta é a opção (**B**).

3.2. $\boxed{\text{PMC2015}}$

Sabendo que num triângulo ao maior ângulo se opõe o maior lado, o lado que se opõe ao ângulo α será o lado que mede 6.

Usando a Lei dos Cossenos temos:

$$6^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos\alpha \Leftrightarrow 36 = 25 + 16 - 40\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40\cos\alpha = 41 - 36$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{8}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria vem:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \text{sen}^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{64} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{63}{64} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{63}{64}}$$

Como α é um ângulo interno do triângulo temos que $\text{sen}\alpha$ é positivo logo:

$$\text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{63}{64}} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha \approx 0{,}992 \ \ (3 \text{ c.d.})$$

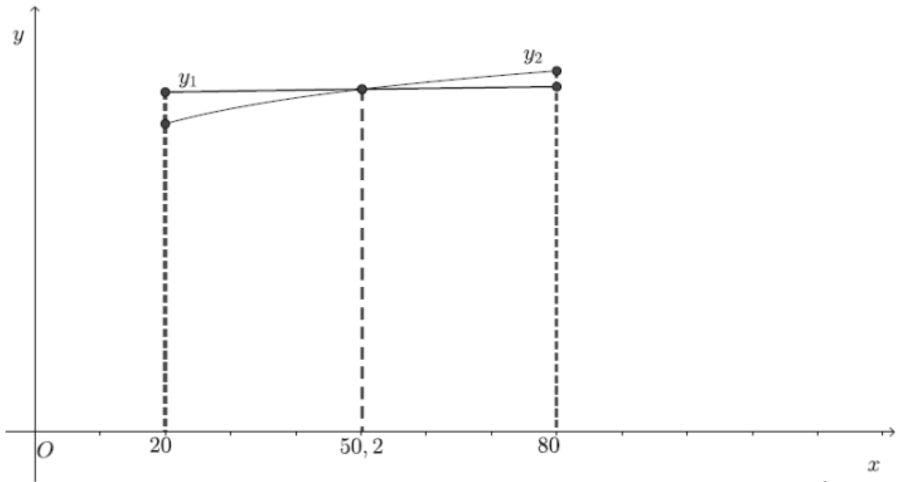
A resposta correta é a opção (**B**).

4.

Sabe-se que aumentando a intensidade I em $150\ \mu\text{W/m}^2$ o nível N, do som, passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial:

$$60 + 10\log_{10}\left(I + 150\right) = 0{,}014 \times \left(60 + 10\log_{10}\left(I\right)\right)^2$$

Considerando as funções $y_1(x) = 60 + 10\log_{10}\left(x + 150\right)$ e $y_2(x) = 0{,}014 \times \left(60 + 10\log_{10}\left(x\right)\right)^2$ e visualizando os gráficos na calculadora gráfica no domínio $\left[20{,}80\right]$ procuramos o ponto de interseção dos dois que é a solução da equação apresentada.



O valor da intensidade inicial do som do despertador é aproximadamente igual a $50\ \mu\text{W/m}^2$ (0 c.d.).

5.

Como se trata do quociente entre funções polinomiais, f é contínua em $]-\infty, 1]$ e em $]1, +\infty[$.

A função é contínua em $x = 1$ se e só se $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Como $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$ e $f(1) = \log_3 k$, temos:

$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$.

A resposta correta é a opção (**D**).

6.

Como 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica temos que:

$\frac{a}{2} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow a^2 = 2b$

Sabendo igualmente que $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, temos que:

$b - (a-2) = 2 - b \Leftrightarrow b - a + 2 = 2 - b \Leftrightarrow a = 2b$

Logo,

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \underset{(a,\, b \neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

7.

Sejam B e C os afixos de z_B e z_C respetivamente. O ponto A é o afixo de z.

Temos que:

Como $[ABCD]$ é um quadrado, vem que $A\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$, pelo que $z_C = z \times i$.

Temos ainda que: $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

Assim,

$$z_B = z_C + z = z \times i + z = z(i+1)$$

$z(i+1)$ é o número complexo cujo afixo é o ponto B.

A resposta correta é a opção (**A**).

8.

Dados $z_1 = 2-3i$ e $z_2 = 1-2i$, vem que $\overline{z_2} = 1+2i$. Pretendemos provar que o afixo do número complexo $w = \dfrac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1+i^7}$ pertence à circunferência definida por $\left|z - z_1\right| = \sqrt{53}$.

Assim,

$$w = \frac{3z_1 - i\overline{z_2}}{1+i^7} = \frac{6-9i-i-2i^2}{1-i} = \frac{6-10i+2}{1-i} = \frac{8-10i}{1-i} = \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{18-2i}{2} = 9-i.$$

Determinando a distância entre os afixos de w e de z_1 temos:

$$\left|w - z_1\right| = \left|(9-i)-(2-3i)\right| = \left|7+2i\right| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os dois pontos é $\sqrt{53}$ então o afixo de w pertence à circunferência de centro z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$, como queríamos mostrar.

9.1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

Vamos determinar o valor máximo que a função objetivo pode alcançar atribuindo os valores das coordenadas de cada um dos vértices do pentágono na expressão que define a referida função.

Calculando as coordenadas dos vértices:

$y = 300 \Rightarrow x + 300 = 400 \Leftrightarrow x = 100$

$x = 150 \Rightarrow 150 + y = 400 \Leftrightarrow y = 250$

x	y	$L = 2x + y$
0	0	0
150	0	300 + 0 = 300
150	250	300 + 250 = 550
100	300	200 + 300 = 500
0	300	0 + 300 = 300

O valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região é 550.

A resposta correta é a opção (C).

9. 2. $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

Como

$$\operatorname{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(3\times\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$

A resposta correta é a opção (C).

10.

Sabe-se que a equação da reta AB é $y = 2x + 4$ e como a ordenada na origem é 4 então as coordenadas do ponto B são $\left(0\,,4\right)$.

Como a ordenada do ponto A é 0 temos que:

$0 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$

Logo as coordenadas do ponto A são $\left(-2\,,0\right)$.

Assim, as coordenadas do ponto M ponto médio do segmento de reta $\left[AB\right]$ são:

$$M = \left(\frac{0-2}{2}\,,\frac{4+0}{2}\right) = \left(-1\,,2\right)$$

A resposta correta é a opção (**B**).

11.

11.1. $\boxed{\textbf{P2001/2002}}$

A partir das equações cartesianas da reta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z-0}{1}$, concluímos que $\left(2,-4,1\right)$ é um vetor diretor de r.

Aplicando o produto escalar excluímos as opções (A), (B) e (D) uma vez que:

$\left(2,4,1\right)\cdot\left(2,-4,1\right) = 4 - 16 + 1 \neq 0$

$\left(-3,1,0\right)\cdot\left(2,-4,1\right) = -6 - 4 \neq 0$

$\left(-4,2,0\right)\cdot\left(2,-4,1\right) = -8 - 8 \neq 0$

Como $\left(1,1,2\right)\cdot\left(2,-4,1\right) = 2 - 4 + 2 = 0$, concluímos que o vetor procurado é $\left(1,1,2\right)$, pois o produto escalar deste pelo vetor diretor da reta é nulo.

A resposta correta é a opção (**C**).

11.2. $\boxed{\textbf{PMC2015}}$

$$\lim\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2} = \lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n} \times \lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2} = e^{\ln a} \times 1^{2} = a \times 1 = a\,.$$

A resposta correta é a opção (**C**).

12.

12.1.

Para estudar a existência das assintotas paralelas aos eixos coordenados, temos de estudar a existência de assintotas verticais e horizontais.

Assintotas verticais:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e}{0^-} = -\infty$$

Logo, $x = 1$ é a equação da única assintota vertical do gráfico de h, uma vez que a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Assintotas horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Logo, $y = 0$ é equação da única assintota horizontal do gráfico de h.

12.2.

$$(x-1) \times \frac{e^x}{x-1} + 2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = 0$$

$C.S. = \{0, \ln 2\}$

13.

13.1.

Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, comecemos por determinar as expressões da primeira derivada e da segunda derivada da função g:

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x$$

$$g''(x) = -\cos(2x) + \cos x$$

Calculando os zeros da segunda derivada:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Em $\left]0\,,\pi\right[$, a única solução é $x = \frac{2}{3}\pi$.

Estudando a variação de sinal da segunda derivada e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, temos:

	0		$\frac{2}{3}\pi$		π
$g''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
g	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$g\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Podemos então concluir que o gráfico de g tem:

- a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{2}{3}\pi\right]$;
- a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2}{3}\pi, \pi\right[$;
- um ponto de inflexão de coordenadas $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{8}\right)$.

13.2.

$$f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{4}\cos(-2x)-\cos(-x)+\frac{1}{4}\cos(\pi-2x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x-\frac{1}{4}\cos(2x)-\operatorname{sen}x=-\operatorname{sen}x-\cos x$$

A resposta correta é a opção (**B**).

14.

Seja a a abcissa do ponto P $(a>0)$, logo P tem de coordenadas $(a\,,a^2)$.

Como $f'(x)=2x$, temos que o declive da reta r é dado por $2a$ e sendo assim o declive da reta s é dado por $-\frac{1}{2a}$.

Seja c a abcissa do ponto Q $(c<0)$, logo temos que $f'(c)=-\frac{1}{2a}$, isto é, $2c=-\frac{1}{2a}$, e portanto $ac=-\frac{1}{4}$.

Como a equação reduzida da reta r é dada por $y=2ax+b$ substituindo as coordenadas do ponto P, temos que:

$$a^2=2a.a+b \Leftrightarrow b=-a^2$$

E, sendo assim, a equação reduzida da reta r é dada por $y=2ax-a^2$.

Efetuando um raciocínio em tudo semelhante para a reta s obtém-se como equação reduzida para a reta s a expressão $y=2cx-c^2$.

Como I é o ponto de intersecção entre as duas retas r e s r então temos:

$$\begin{cases} y=2ax-a^2 \\ y=2cx-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+a^2=2ax \\ y+c^2=2cx \end{cases} \underset{\substack{a>0\Rightarrow a\neq 0 \\ c<0\Rightarrow c\neq 0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \dfrac{y+a^2}{2a}=x \\ \dfrac{y+c^2}{2c}=x \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{y+a^2}{2a}=\frac{y+c^2}{2c} \underset{\substack{a>0\Rightarrow a\neq 0 \\ c<0\Rightarrow c\neq 0}}{\Leftrightarrow} yc+ca^2=ya+ac^2 \Leftrightarrow yc-ya=ac^2-ca^2 \Leftrightarrow y(c-a)=ac(c-a) \Leftrightarrow$$

$$\underset{\substack{a>0\,\wedge\, c<0\Rightarrow \\ \Rightarrow c-a<0\Rightarrow c-a\neq 0}}{\Leftrightarrow} y=ac \underset{ac=-\frac{1}{4}}{\Leftrightarrow} y=-\frac{1}{4}$$

Assim, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.