mathniversity®

promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 835) – 2ª FASE – 22 DE JULHO 2019

1.

Vamos começar por calcular quantos votos têm direito cada uma das categorias de votos nos intervalos de antiguidade definidos na tabela. Para isso acrescente-se na tabela, o número de votos a que cada sócio tem direito em cada entrada da tabela.

Anos como Sócio	**Titular**		**Efetivo**	
	Nº de sócios	Nº de votos	Nº de sócios	Nº de votos
$[1, 5[$	4	2	1	1
$[5, 10[$	6	3	2	1
$[10, 15[$	30	4	11	2
$[15, 20[$	12	5	3	2

Número de sócios que votaram no Ricardo:

$$4 + 6 + 30 + 12 + 1 + 2 + 11 + 3 = 69$$

Números de votos que obteve o Ricardo:

$$4 \times 2 + 6 \times 3 + 30 \times 4 + 12 \times 5 + 1 \times 1 + 2 \times 1 + 11 \times 2 + 3 \times 2 =$$
$$= 8 + 18 + 120 + 60 + 1 + 2 + 22 + 6 = 237$$

Portanto, o Ricardo teve 237 votos, referentes aos 69 sócios que votaram nele. O que nos permite concluir que a afirmação é verdadeira pois na Teresa votaram 71 sócios que lhe conferiram apenas 210 votos.

2.

2.1. Tendo em consideração o descrito no enunciado, comecemos por determina o valor do quadro aquando da sua compra por parte de Teresa:

$$V(0) = \frac{1000}{1 + 4e^{-0,2 \times 0}} = \frac{1000}{5} = 200\ €$$

A expressão dada para o valor de mercado do quadro contabiliza o tempo através de trimestres pelo que ao fim de seis meses $t = 2$. Ou seja:

$$V(2) = \frac{1000}{1 + 4e^{-0,2 \times 2}} \approx 271,64\ €$$

Ora, poderemos verificar que:

$$30\%\ de\ 200\ € = 0{,}3 \times 200 = 60\ €$$

$$valorização\ = 271{,}64 - 200 = 71{,}64\ €$$

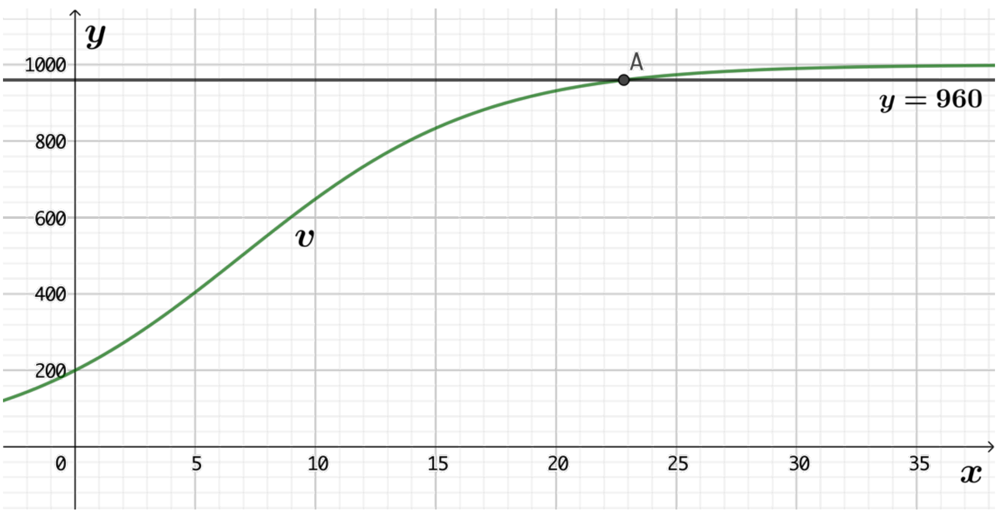
Podemos então concluir que a Teresa realizou um bom investimento, visto que a valorização (71,64 €) foi superior a 30% do valor inicial do quadro (60 €).

2.2. Tratando-se $V(t)$ de um modelo logístico, tenderá a estabilizar nos 1000 €, o que pode ser comprovado a partir dos valores do modelo na tabela da calculadora

t (em trimestres)	Valor do quadro (em euros)
50	999,818433253
60	999,975423755
70	999,996673896
80	999,99954986
90	999,99993908
100	999,999991755
....	...

Logo, a Teresa teve o quadro na sua posse até o seu valor de mercado atingir os
960 € (1000 − 40).

Assim sendo, e recorrendo ao menu gráfico da calculadora, podemos obter a seguinte representação gráfica que modela a situação descrita:



Onde se tem que as coordenadas de A são:

$$A(\ 22{,}8\ ;\ 960\ )$$

Passando o valor dos trimestres para meses:

$$3 \times 22{,}8 = 68{,}4 \approx 68\ meses$$

A Teresa ficou com o quadro durante 68 meses após a sua compra.

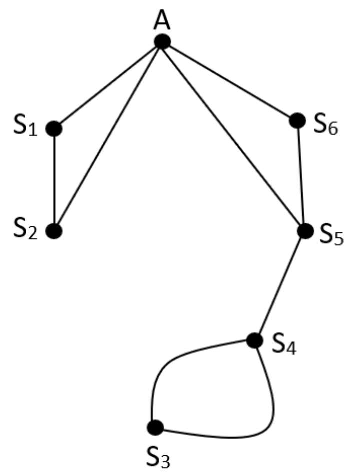
3.
De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Sócios	A	B	C
Valor Global atribuído	150+211+158= =519	249+252+120= =621	200+258+145= =603
Valor considerado justo	519/3=173	621/3=207	603/3=201
Atribuição do espaço	E3	E1	E2
Valor provisório do aluguer	158	249	258
Excedente (E)	---	249-207=42	258-201=57
Défice (D)	173-158=15	---	---
E - D	42+57-15=99-15=84		
Parte a descontar no valor considero justo	84/3=28		
Valor final	173-28=145	207-28=179	201-28=173

Assim, temos que a atribuição dos espaços e o respetivo valor a pagar é:

- Sócio A - deve pagar 145 € pelo espaço E3
- Sócio B - deve pagar 179 € pelo espaço E1
- Sócio C - deve pagar 173 € pelo espaço E2

4.
O grafo que modele a situação apresentada pode ser o seguinte



O percurso que o presidente do Clube pretendia definir - com início e fim no Átrio (A), cruzar todas as portas, entrar em todas as salas e não cruzar nenhuma porta mais do que uma vez – corresponde a ser-se capaz de definir, no grafo conexo que modela a situação, um circuito de Euler. Ora, é condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler que todos os seus vértices sejam de grau par.

No grafo construído, S_4 e S_5 , que representam as salas respetivas, têm grau ímpar , sendo esse facto que impede o cumprimento do objetivo do presidente.

Na futura remodelação, para que o objetivo do presidente possa ser alcançado, terão de acrescentar uma nova porta entre as salas S_4 e S_5. Desta forma, todos os vértices do grafo serão de grau par e nele poder-se-á definir circuitos de Euler.

5.

5.1.

O Daniel comprou 10 carteiras de cromos, e todas elas continham um vale de oferta que podia ser de 1 carteira grátis ou 5 carteiras grátis. As carteiras de cromos obtidas através dos vales de oferta nunca contêm novos vales de oferta.

Assim, em 10 carteiras podia ter:

Nº de vales de 1 carteira grátis	Nº de vales de 5 carteiras grátis	Total de carteiras grátis
10	0	$10 \times 1 + 0 \times 5 = 10$
9	1	$9 \times 1 + 1 \times 5 = 14$
8	2	$8 \times 1 + 2 \times 5 = 18$
7	3	$7 \times 1 + 3 \times 5 = 22$
…	…	…

E não vale apena fazer mais conjugações, pois das hipóteses apresentadas (11, 13, 15 e 18) como valores que podem representar o número de carteiras grátis que o Daniel obteve com os vales, será o 18 o único que pode ser escolhido.

Logo a opção correta é a **(D)**.

5.2.

Preço gasto na compra das 131 carteiras: $131 \times 0{,}9 = 117{,}9$ €

Reuniu 750 cromos.

Cromos repetidos, não dourados: $46\% \times 750 = 0{,}46 \times 750 = 345$.

Nº de cromos dourados obtidos por troca dos repetidos: $345 \div 5 = 69$

Nº de cromos que já tem para a caderneta: $750 - 345 = 405$

Nº de cromos em falta (que são todos dourados): $485 - 405 = 80$

Nº de cromos dourados em falta: $80 - 69 = 11$

Valor a pagar pelos 11 cromos dourados em falta: $11 \times 0{,}25 + 2 = 2{,}75 + 2 = 4{,}75$€

Total gasto pelo Daniel para fazer a coleção: $117{,}9 + 4{,}75 = 122{,}65$€

6.

6.1.

Para que a média das 10 licitações seja de 34 €, o somatório de todas as licitações terá de ser 340 € $\left(\frac{340}{10} = 34\right)$

Ora o somatório dos valores apresentados no diagrama de caule e folhas é de:

$$14 + 16 + 22 + 31 + 32 + 37 + 45 + 48 + 50 = 295€$$

Pelo que o valor da licitação em falta é dado por: $340 - 295 = 45€$

Logo a opção correta é a **(A)**.

6.2.1.

Existem várias distribuições que satisfazem as condições do enunciado, e que levam as respostas distintas.

Alguns exemplos são:

Exemplo 1:

x_1	....	x_{16}	x_{17}	...	x_{32}	x_{33}	...	x_{48}	x_{49}	...	x_{64}
20	...	30	30	...	30	50	...	59	61	...	70

Assim, $x_{mín}$ = 20; $Q_1 = \frac{x_{16}+x_{17}}{2} = 30$; $Q_2 = \frac{x_{32}+x_{33}}{2}$=40; $Q_3 = \frac{x_{48}+x_{49}}{2}$=60 e x_{max} = 70.

O número total de artigos é de 64, o número de artigos com o preço máximo de 60€ é 48 e o número de artigos com um preço, no mínimo, de 40 € é de 32

Exemplo 2:

x_1	....	x_{16}	x_{17}	...	x_{32}	x_{33}	...	x_{48}	x_{49}	...	x_{64}
20	...	20	40	...	40	40	...	59	61	...	70

Onde, $x_{mín}$ = 20; $Q_1 = \frac{x_{16}+x_{17}}{2} = 30$; $Q_2 = \frac{x_{32}+x_{33}}{2}$=40; $Q_3 = \frac{x_{48}+x_{49}}{2}$=60 e x_{max} = 70.

O número total de artigos é também de 64, o número de artigos com o preço máximo de 60€ é 48 e o número de artigos com um preço, no mínimo, de 40 € é, neste caso de 48

Exemplo 3:

x_1	x_2	....	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{27}	...	x_{48}	x_{49}
20	30	...	30	39	40	41	60	...	60	70

Obtendo-se $x_{mín}$ = 20; $Q_1 = \frac{x_{12}+x_{13}}{2} = 30$; $Q_2 = x_{25}$ =40; $Q_3 = \frac{x_{37}+x_{38}}{32}$=60 e x_{max} = 70.

O número total de artigos é agora de 49, o número de artigos com o preço máximo de 60€ é 48 e o número de artigos com um preço, no mínimo, de 40 € é 25

6.2.2.

Abril	Julho	Agosto
Mediana – 40 Valor mín – 10	1º quartil – 40 3º quartil - 70	Valor máx - 90

Valor das vendas: $40 + 10 + 40 + 70 + 90 + 90 = 340$ €

7.

7.1.

Seja a idade dos sócios a variável X. Sabe-se que $X \sim N(35, 5)$.

Pretende-se determinar $P(X > 45)$.

$$45 = 35 + 2 \times 5$$

$$P(35 - 2 \times 5 < X < 35 + 2 \times 5) \approx 0{,}9545$$

$$P(X > 45) = P(X > 35 + 2 \times 5) \approx (1 - 0{,}9545) \div 2 \approx 0{,}02275 \ \rightarrow 2{,}275\% \approx 2{,}3\%$$

Ou

Recorrendo às capacidades da calculadora, obtém-se o valor

$$P(X > 45) \approx 0{,}02275 \rightarrow 2{,}275\% \approx 2{,}3\%$$

A opção correta é a **(B)**.

7.2.

Consideremos os acontecimentos:

M: "Ser mulher".

E: "Ser sócio efetivo".

	E	$\bar{E}$	Total
M			0,45
$\bar{M}$	0,30	0,25	0,55
Total			1

Sabemos que existem 180 sócios mulheres.

$$P(M) = \frac{N^{\underline{o}} \ de \ sócios \ mulheres}{N^{\underline{o}} \ total \ de \ sócios} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}45 = \frac{180}{N^{\underline{o}} \ total \ de \ sócios} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow N^{\underline{o}} \ total \ de \ sócios = 400$$

Queremos determinar $P(M \cup \bar{E})$.

$$\begin{aligned} P(M \cup \bar{E}) &= P(M) + P(\bar{E}) - P(\bar{E} \cap M) \\ &= P(M) + P(\bar{E} \cap M) + P(\bar{E} \cap \bar{M}) - P(\bar{E} \cap M) = \\ &= P(M) + P(\bar{E} \cap \bar{M}) = \\ &= 0{,}45 + 0{,}25 = 0{,}70 \end{aligned}$$

Logo, o número de sócios que não são efetivos ou que são mulheres correspondem a 70% do total de sócios.

$$0{,}70 \times 400 = 280$$

O número de sócios que não são efetivos ou que são mulheres é 280.

7.3.
Consideremos agora o acontecimento:

L: “Participar em Leilões”.

	E	$\bar{E}$	Total
L	0,35	$\frac{7}{20}$=0,35	0,70
$\bar{L}$	0,10	0,20	0,30
Total	0,45	0,55	1

Queremos determinar $P(\bar{L}|E)$.

$$P(\bar{L} \mid E) = \frac{P(\bar{L} \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}10}{0{,}45} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{45}{100}} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

8.

Pretendemos determinar um intervalo de confiança a 90% para a proporção de colecionadores, dado por:

$$\left]\hat{p} - z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ;\ \hat{p} + z \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

Recolhendo os sucessivos valores dos parâmetros considerados:

$90\%\ de\ confiança\ \rightarrow z = 1{,}645$

$n = 200$

$\hat{p} = \frac{45}{200} = 0{,}225$

Logo, o intervalo de confiança pedido é dado por:

$$\left]0{,}225 - 1{,}645 \times \sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}}; 0{,}225 + 1{,}645 \times \sqrt{\frac{0{,}225(1-0{,}225)}{200}}\right[\approx \left]17{,}6\,;27{,}4\right[$$