

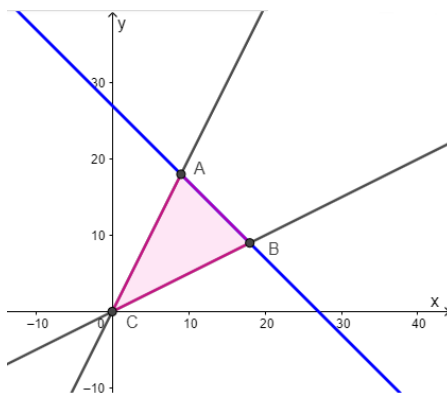
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 15 DE JULHO 2020

1. A função objetivo que pretendemos maximizar é: $L(x) = 1000x + 2000y$. As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 27 \\ x \leq 2y \\ y \leq 2x \end{cases}$$

Construindo a região das soluções admissíveis obtemos:



Determinando as intersecções correspondentes aos vértices da região admissível, averiguamos a solução ótima:

| (x, y) | $L(x, y)$ |
|------------|---|
| $A(9, 18)$ | $L(9, 18) = 1000 \times 9 + 2000 \times 18 = 45000$ |
| $B(18, 9)$ | $L(18, 9) = 1000 \times 18 + 2000 \times 9 = 36000$ |

← Solução ótima!

Desta forma, para obter o lucro máximo a empresa deve enviar ao cliente 9 toneladas de trigo e 18 toneladas de centeio.

2.

2.1.

O número de passos dados pelo João representam uma progressão aritmética de razão 710 e primeiro termo 3168 ($u_1 = 3168$). Logo, o número de passos dados pelo João nos dias seguintes pode ser obtido através da expressão $u_n = 3168 + 710 \times (n - 1)$.

O número de passos dados pela Maria representam uma progressão aritmética de razão 625 e primeiro termo 4358 ($v_1 = 4358$). Logo, o número de passos dados pela Maria nos dias seguintes pode ser obtido através da expressão $v_n = 4358 + 625 \times (n - 1)$.

No dia que eles dão o mesmo número de passos $u_n = v_n$.

$$\begin{aligned}u_n = v_n &\Leftrightarrow 3168 + 710 \times (n - 1) = 4358 + 625 \times (n - 1) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 3168 + 710n - 710 = 4358 + 625n - 625 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2458 + 710n = 3733 + 625n \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 710n - 625n = 3733 - 2458 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 85n = 1275 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow n = 15\end{aligned}$$

Portanto, o João e a Maria deram exatamente o mesmo número de passos no dia 15 de agosto.

2.2.

O número de conchas em cada fila é igual aos termos de uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 1 ($u_1 = 1$).

O número total de conchas usadas até a fila k é igual à soma dos k primeiros termos dessa progressão, ou seja, é:

$$u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = 1 \times \frac{1-2^k}{1-2} = -1 \times (1 - 2^k) = -1 + 2^k.$$

Este número, não pode ultrapassar 271.

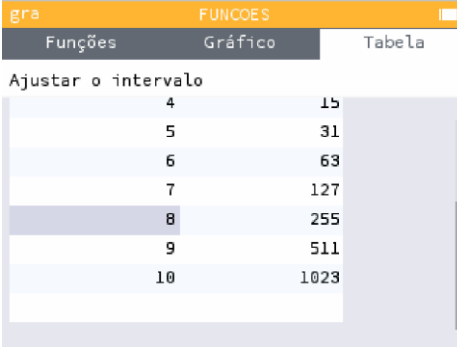
$$-1 + 2^k \leq 271$$

Utilizando a calculadora gráfica, podemos observar, através de uma tabela, que o valor seria ultrapassado na fila 9.

Até à fila 8 a Maria utilizou 255 conchas.

$$271 - 255 = 16$$

Logo, sobraram à Maria 16 conchas.



The image shows a screenshot of a graphing calculator interface. At the top, there is a menu bar with 'FUNCOES' and a small icon. Below the menu bar, there are three tabs: 'Funções', 'Gráfico', and 'Tabela'. The 'Tabela' tab is selected. Below the tabs, there is a section titled 'Ajustar o intervalo'. Below this section, there is a table with two columns. The first column contains the values 4, 5, 6, 7, 8, 9, and 10. The second column contains the values 15, 31, 63, 127, 255, 511, and 1023. The row with the value 8 in the first column and 255 in the second column is highlighted.

| 4 | 15 |
|----|------|
| 5 | 31 |
| 6 | 63 |
| 7 | 127 |
| 8 | 255 |
| 9 | 511 |
| 10 | 1023 |

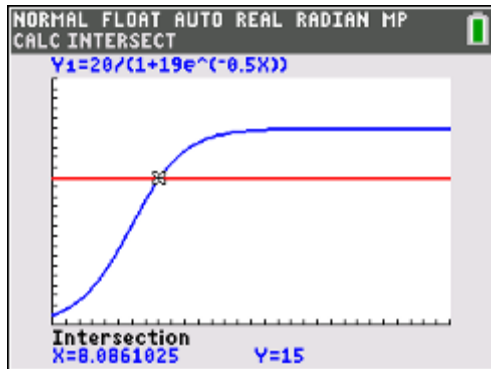
3.

3.1.

Podemos utilizar as capacidades gráficas da calculadora para resolver a equação $P(t) = 15$.

Utilizamos para isso a representação gráfica da função P e da reta $y = 15$.

A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos corresponde à solução que procuramos:



Podemos então dizer que a população atingiu as 15 toneladas passados 8 anos do instante inicial.

Também poderíamos chegar à mesma solução resolvendo a equação analiticamente:

$$P(t) = 15 \Leftrightarrow \frac{20}{1 + 19e^{-0.5t}} = 15$$

$$\Leftrightarrow 15(1 + 19e^{-0.5t}) = 20 \quad \text{o denominador nunca se anula}$$

$$\Leftrightarrow 15 + 15 \times 19e^{-0.5t} = 20 \Leftrightarrow 285e^{-0.5t} = 20 - 15 \Leftrightarrow e^{-0.5t} = \frac{5}{285}$$

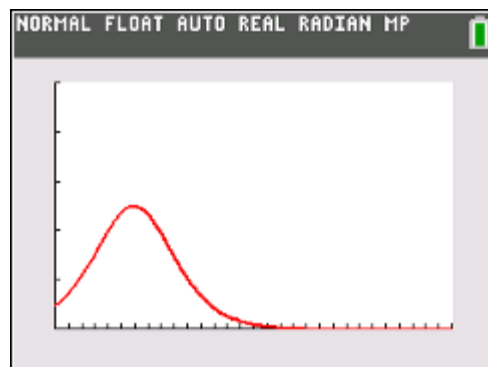
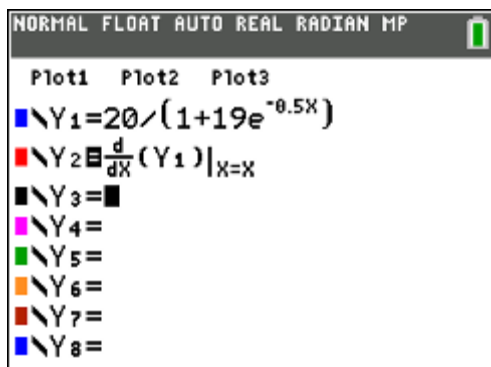
$$\Leftrightarrow -0.5t = \ln\left(\frac{5}{285}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{57}\right)}{-0.5} \Leftrightarrow t = 8.086 \approx 8$$

Resposta: 8 anos

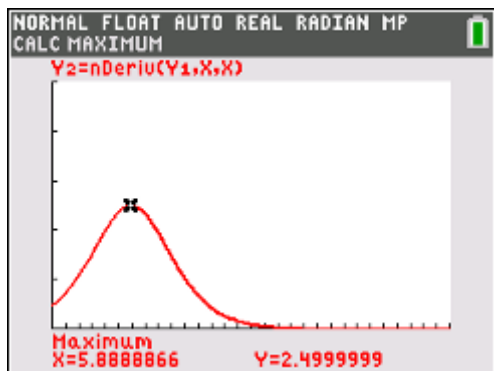
3.2.

A taxa de variação instantânea é-nos dada em cada instante pela função derivada do modelo $P(t)$ apresentado.

Recorremos às capacidades gráficas da calculadora para representar essa função:



E agora basta-nos encontrar a abcissa do ponto correspondente ao máximo da função derivada:



Podemos observar que a taxa de variação instantânea é máxima para $t \approx 5.889$.

Como $0.889 \times 12 = 10.688$, podemos concluir que a população de peixes estava a crescer mais rapidamente passados 5 anos e 11 meses após o instante inicial.

3.3.

À medida que o tempo vai aumentando o valor de $e^{-0.5t}$ vai-se aproximando de zero.

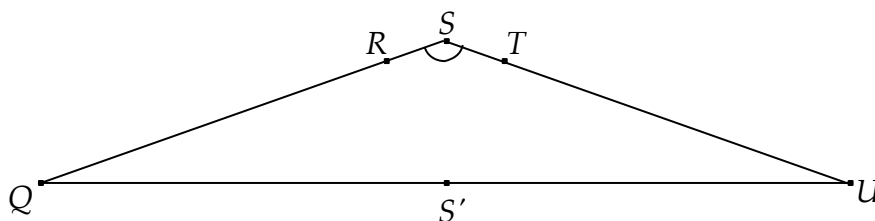
Então o valor dado pelo modelo vai-se aproximando de $\frac{20}{1+19 \times 0} = 20$.

Dito de outra forma: a reta de equação $y = 20$ é uma assintota horizontal ao gráfico da função $P(t)$ e, por isso, a população de peixes nunca excederá as 20 toneladas.

4.

4.1.

Com base na figura 2 construímos o esquema que nos vai ajudar a resolver o problema:



Como o triângulo $[QSU]$ é isósceles vamos considerar o triângulo retângulo $[SS'U]$ onde a amplitude α do ângulo USS' é metade da do ângulo QSU .

Como o ângulo QSU é obtuso e $\sin \alpha = 0.5$ podemos concluir que $\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ (note-se que o ângulo cujo seno é 0,5 tem amplitude 30°).

Então temos que:

a amplitude do ângulo $SS'U$ é de $150 \div 2 = 75^\circ$

$$\frac{\overline{S'U}}{2} = \frac{2,3}{2} = 1,15$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\overline{S'U}}{\overline{SU}} \Leftrightarrow \overline{SU} = \frac{1,15}{\sin 75^\circ} \Leftrightarrow \overline{SU} \approx 1,19$$

Assim, vem que $\overline{TU} = \overline{SU} - \overline{ST} = 1,19 - 0,10 = 1,09$

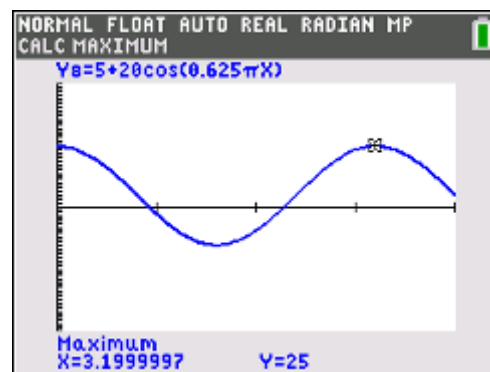
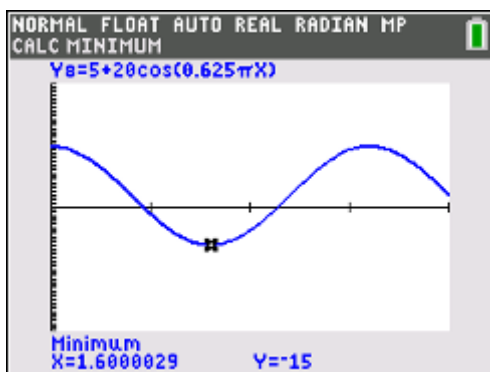
O comprimento do cabo do remo é 1,1 metros.

4.2.

A função h é uma função periódica e o problema consiste em determinar a diferença entre o valor mínimo e o valor máximo que a função atinge.

Para isso vamos recorrer à calculadora gráfica, com uma janela de visualização adequada, tendo em conta o contexto do problema, por exemplo, com $x \in [0, 4]$ e $y \in [-50, 50]$ (repare-se que o valor da cota é dado em centímetros).

Calculamos de seguida as coordenadas de um ponto de mínimo e de um ponto de máximo:



Por análise dos gráficos podemos então concluir que a diferença entre a cota máxima e a cota mínima é dada por $25 - (-15) = 40$ cm.

5.

5.1.

A superfície da água do mar corresponde a 0 metros de profundidade, logo a pressão da água do mar à superfície é dada por $p(0)$.

$$p(0) = 1$$

Assim, a pressão da água do mar à superfície é de 1 atm.

5.2. O declive da reta é 0,1, o que significa que, quando a profundidade aumenta 1 metro, a pressão aumenta 0,1 atmosferas.

6.

A partir da informação obtida através da leitura do gráfico que nos é dado no enunciado, construímos a seguinte tabela:

| x | Mês | Frequências simples |
|-----|-----------|---------------------|
| 1 | Janeiro | 6851 |
| 2 | Fevereiro | 5821 |
| 3 | Março | 4271 |
| 4 | Abril | 6185 |

Assim, podemos concluir que o mês de abril corresponde a $x = 4$ e, por isso, o total de pescado nesse mês é igual a 6185 toneladas.

Deste modo, sendo a quantidade de molusco correspondente a 10,8% da quantidade total de pescado, temos que:

$$10,8\% \times 6185 = 667,98 \approx 668 \text{ (valor arredondado às unidades).}$$

Em Portugal, em abril de 2018, foi capturada a quantidade de 668 toneladas de molusco.

7.

Seja X a variável aleatória “comprimento de um sargo capturado, em centímetros”, temos que $X \sim N(22; 3,5)$ e pretende-se determinar a $P(X < 15)$.

1º Processo

Sendo X uma variável aleatória normal de valor médio 22 e desvio padrão 3,5, então $\mu - 2\sigma = 15$ e $\mu + 2\sigma = 29$ e, por isso, $P(15 < X < 29) \approx 0,9545$.

$$P(X < 15) = \frac{1 - 0,9545}{2} = 0,02275 \approx 2\%$$

Assim, a probabilidade de o sargo escolhido ser devolvido ao mar é igual a 2%.

2º Processo

$$P(X < 15) = P(X < 22) - P(15 < X < 22).$$

Recorrendo à calculadora gráfica, **normalcdf(15; 22; 22; 3,5)**, obtemos que

$$P(15 < X < 22) = 0,47725.$$

Como $P(X < 22) = 0,5$ então podemos concluir que

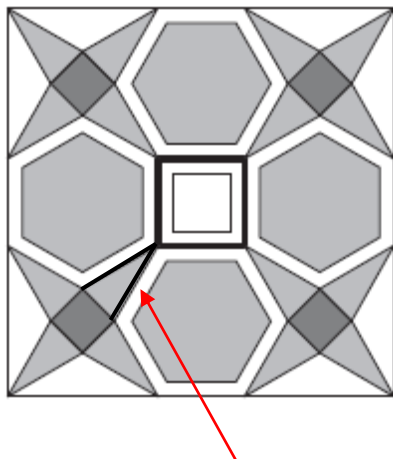
$$P(X < 22) - P(15 < X < 22) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275 \approx 2\%$$

Assim, a probabilidade de o sargo escolhido ser devolvido ao mar é igual a 2%.

8.

8.1.

Analisemos o esquema representado na figura 6:



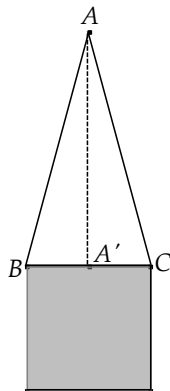
Podemos observar que o lado do quadrado maior, **a negrito**, é igual ao lado dos hexágonos maiores (não sombreados). Por sua vez, o lado destes hexágonos é igual ao lado maior dos triângulos isósceles sombreados.

Cada um desses lados mede então 3 cm.

Por outro lado, sabemos que a amplitude de cada um dos ângulos internos de um hexágono regular é 120° .

(Também podemos fazer $\frac{180 \times (6-2)}{6} = 120^\circ$)

Usemos agora um esquema que nos permita calcular a medida do lado menor dos triângulos e, com isso, a medida de área de cada quadrado sombreado:



Observando ainda o esquema da figura 6, podemos deduzir o valor da amplitude \hat{A} :

$$120^\circ + 90^\circ + 120^\circ + \hat{A} = 360^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$$

Donde concluímos que $\hat{C} = 75^\circ$

$$\text{Assim, temos: } \cos 75^\circ = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{A'C} = \overline{AC} \times \cos 75^\circ \approx 3 \times 0,776 = 2,328$$

$$\overline{BC} = 2 \times \overline{A'C} \approx 2 \times 1,164 = 2,328$$

A área de cada quadrado sombreado é : $\overline{BC} \times \overline{AA'} = 2,328 \times 1,164 \approx 2,71$ cm²

8.2.

Da figura 7 e dos dados do problema podemos deduzir as coordenadas dos pontos A e M .

Assim temos $A(-1,5,0)$ e $M(1,5,1,5)$

$$\text{O declive da reta } AM \text{ é } m = \frac{1,5 - 0}{1,5 - (-1,5)} = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

A reta pertence então à família $y = 0,5x + b$

Como passa em A , substituindo na equação, obtemos: $0,5 \times (-1,5) + b = 0 \Leftrightarrow b = 0,75$

Donde se conclui que a equação da reta é $y = 0,5x + 0,75$