

## PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 6 DE SETEMBRO 2021

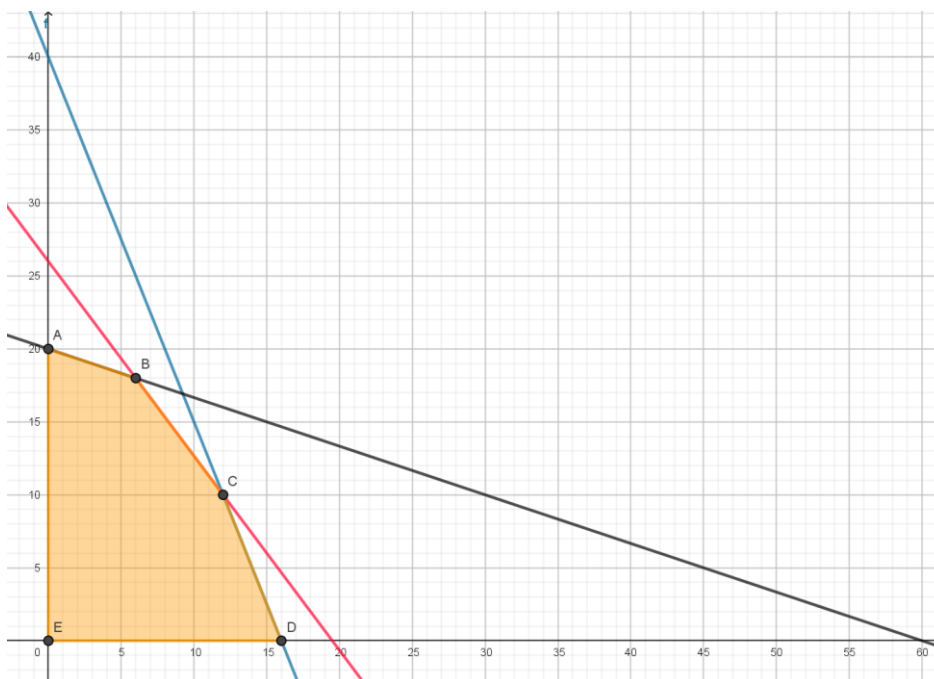
1.

A função objetivo que pretendemos maximizar é:  $L(x, y) = 180x + 160y$ , onde  $x$  é o número de lotes  $A$  e  $y$  é o número de lotes  $B$ .

De acordo com as condições colocadas temos as seguintes restrições do problema:

$$\begin{cases} 40x + 16y \leq 640 \\ 4x + 12y \leq 240 \\ 20x + 15y \leq 390 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2y \leq 80 \\ x + 3y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 78 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{5x}{2} + 40 \\ y \leq -\frac{x}{3} + 20 \\ y \leq -\frac{4x}{3} + 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Utilizando a tecnologia gráfica construimos a região admissível e identificamos as coordenadas dos pontos que são vértices relevantes para a obtenção da solução:



As coordenadas dos pontos são:  $A(0,20)$ ,  $B(6,18)$ ,  $C(12,10)$  e  $D(16,0)$

Averiguamos agora qual a solução ótima:

$x$	$y$	$L(x, y) = 180x + 160y$
0	20	$180 \times 0 + 160 \times 20 = 3200$
6	18	$180 \times 6 + 160 \times 18 = 3960 \rightarrow$ <b>solução ótima</b>
12	10	$180 \times 12 + 160 \times 10 = 3760$
16	0	$180 \times 16 + 160 \times 0 = 2880$

**Resposta:** Devem-se vender 6 lotes do tipo A e 18 lotes do tipo B.

2.

2.1. Temos que calcular  $C(2) - C(1)$

$$C(2) - C(1) = 42(1 - e^{-0,1056 \times 2 - 0,4222}) - 42(1 - e^{-0,1056 - 0,4222}) \approx 19,707 - 17,224 \approx 2,483 \approx 2,5$$

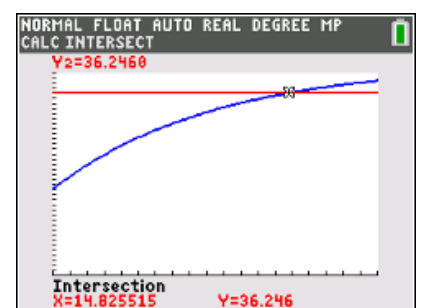
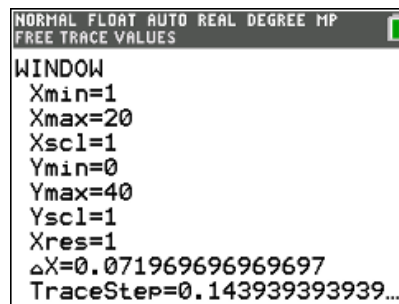
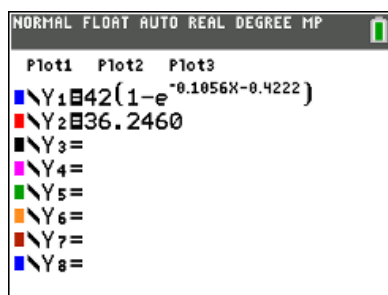
**Resposta:** Durante o segundo ano de vida, um carapau cresce, aproximadamente, 2,5 cm

2.2. Com 400 gramas de massa, um carapau terá um comprimento tal que  $M(C) = 400$

$$M(C) = 400 \Leftrightarrow 0,0084 \times C^3 = 400 \Leftrightarrow C = \sqrt[3]{\frac{400}{0,0084}} \Leftrightarrow C \approx 36,2460$$

Para determinar a idade desse carapau temos que resolver a equação  $C(t) = 36,2460$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:



A idade do carapau é, aproximadamente, 14,8255 anos.

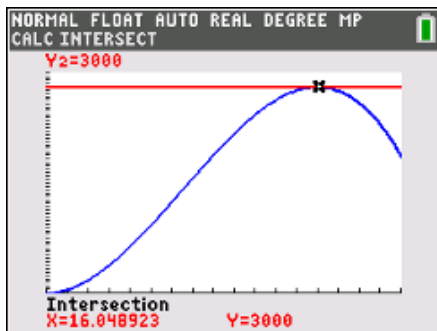
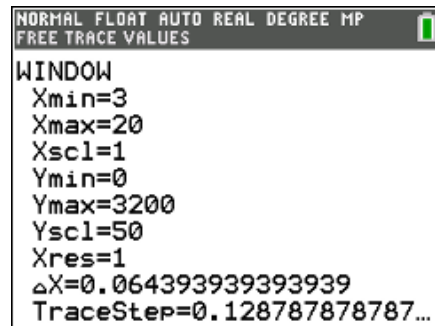
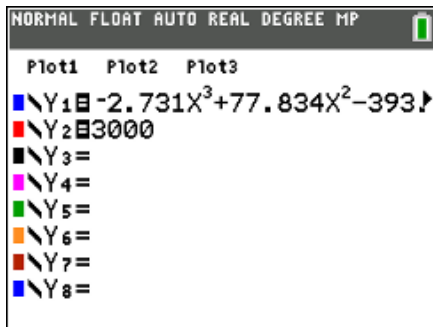
$$0,8255 \times 12 = 9,906 \approx 10$$

**Resposta:** A idade de um carapau com 400g é, aproximadamente, 14 anos e 10 meses.

3.

3.1. Para determinarmos o valor de  $N$  temos que resolver a equação  $P(v) = 3000$ , com  $v > 15$

Usemos a tecnologia gráfica para resolver esta equação:



**Resposta:** O valor de  $N$  é, aproximadamente, 16 m/s .

3.2. A taxa pedida é dada por  $t.v.m._{[5,15]} = \frac{P(15) - P(5)}{15 - 5} \approx \frac{2949,59 - 191,18}{10} \approx 275,84 \approx 276$

**Resposta:** A taxa de variação média é de 276 kW / m/s . O que significa que quando a velocidade do vento varia de 5 para 15 m/s, a potência útil injetada na rede aumenta, em média, 276 kW por m/s.

3.3. Para  $v > N$  temos que, de acordo com os dados,  $P(v) = 3000$ , isto é, a função é constante.

Então teremos que  $T = 0$ , para  $v > N$ .

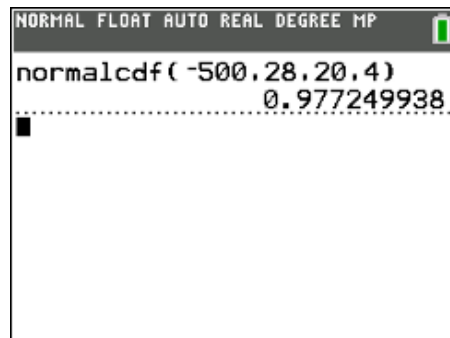
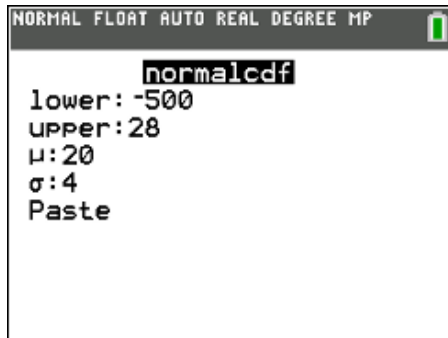
**Resposta:**  $T = 0$ , para  $v > N$ , porque a taxa de variação instantânea de uma função constante é sempre nula.

4.

4.1. Atendendo à hora de saída (8h 32m), para que o autocarro chegue às 9 horas, a viagem da Mariana durará 28 minutos.

A duração da viagem segue uma distribuição normal de parâmetros 20 e 4, isto é, a variável  $Y$  segue uma distribuição  $N(20, 4)$ .

Para determinar a probabilidade do autocarro chegar antes das 9 horas, podemos usar a calculadora para determinar  $P(Y < 28)$ , utilizando um limite inferior fictício, muito pequeno, no comando normalcdf do menu de distribuições de probabilidades:



Temos assim que  $P(Y < 28) \approx 0,98$

**Resposta:** A probabilidade do autocarro chegar antes da hora prevista é, aproximadamente, 98%.

4.2. Para determinarmos o valor de  $a$ , temos primeiro que determinar o valor de  $b$ .

Ora, sabemos que a soma das probabilidades tem que ser 1, pelo que

$$0,55 + 0,25 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 - 0,80 \Leftrightarrow b = 0,20$$

Como o valor médio da variável aleatória é 16,76 temos que ter:

$$0,55 \times 14,20 + 0,25a + 0,20 \times 20,50 = 16,76$$

$$\Leftrightarrow 0,25a = 16,76 - 7,81 - 4,1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4,85}{0,25} \Leftrightarrow a = 19,40$$

**Resposta:** O preço do bilhete do tipo 2 é 19,40 €

5.

5.1. Existirá algum  $n$  de tal modo que  $u_n = 100$ ? Resolvamos então a equação

$$2n + 45 = 100 \Leftrightarrow n = \frac{100 - 45}{2} \Leftrightarrow n = 27,5 \text{ que não é um número natural.}$$

**Resposta:** Nenhum dos cabos tem 100 metros de comprimento.

5.2. Nos 1000 m de comprimento do tabuleiro podemos estabelecer  $1000 \div 25 = 40$  espaços de 25 m. Como as “torres não são cabos”, existem então 39 cabos verticais entre o tabuleiro e cada um dos quatro cabos rectilíneos.

Em cada uma das partes temos um comprimento total de cabos que é dado por:

$$S = \frac{u_1 + u_{39}}{2} \times 39 = \frac{2 \times 1 + 45 + 2 \times 39 + 45}{2} \times 39 = \frac{47 + 123}{2} \times 39 = 3315$$

Nos quatro cabos teremos  $4 \times 3315 = 13260$

**Resposta:** A totalidade dos cabos verticais mede 13260 metros de comprimento.

6.

6.1. Atendendo às coordenadas do ponto  $A(1,0)$  e ao centro da circunferência estamos perante uma “circunferência trigonométrica”; a reta  $r$  identifica-se com o “eixo das tangentes”.

A área do triângulo  $[DOC]$  é dada por  $A_1 = \frac{\overline{OD} \times \overline{AC}}{2}$

Como  $\overline{OD} = 1$  e  $\overline{AC} = \text{tg}(\alpha)$ , temos que  $A_1 = \frac{\text{tg}(\alpha)}{2}$

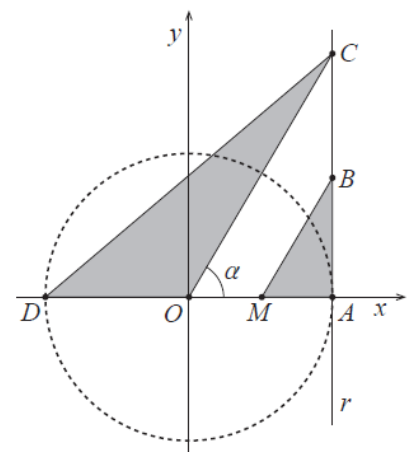
Por outro lado, como  $[MB]$  é sempre paralelo a  $[OC]$ , o ângulo  $AMB$  é igual a  $\alpha$  e, assim, o triângulo  $[AMB]$  é semelhante ao triângulo  $[AOC]$  e, por isso, os seus lados são proporcionais.

Assim, como  $\overline{AM} = \frac{\overline{AO}}{2} = 0,5$ , então  $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\text{tg}(\alpha)}{2}$

A área do triângulo  $[AMB]$  é então dada por  $A_2 = \frac{\overline{AM} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\text{tg}(\alpha)}{2}}{2} = \frac{\text{tg}(\alpha)}{8}$

**Resposta:** A soma  $T$  é igual a  $A_1 + A_2 = \frac{\text{tg}(\alpha)}{2} + \frac{\text{tg}(\alpha)}{8} = \frac{4\text{tg}(\alpha)}{8} + \frac{\text{tg}(\alpha)}{8} = \frac{5\text{tg}(\alpha)}{8}$ , como

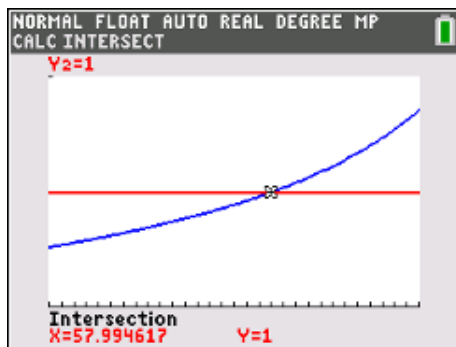
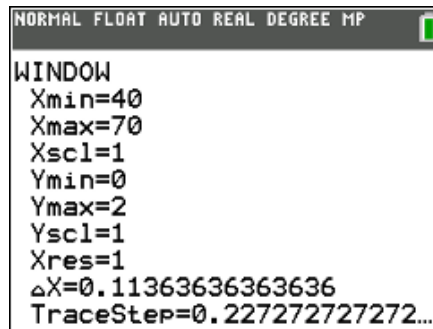
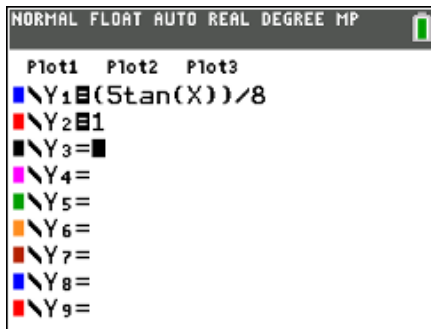
se queria mostrar.



6.2. Para respondermos à questão temos que encontrar as soluções inteiras da inequação  $T(\alpha) > 1$

com  $40^\circ \leq \alpha \leq 70^\circ$  e  $T(\alpha) = \frac{5 \operatorname{tg}(\alpha)}{8}$

Usemos a calculadora gráfica:



A função  $T$  é sempre crescente no seu domínio. Assim, podemos obter a resposta pretendida.

**Resposta:** o menor valor inteiro de  $\alpha$  para o qual a soma das áreas é superior a 1 é  $58^\circ$  e o maior é  $70^\circ$ .

6.3. Se  $\alpha = 45^\circ$  temos que  $\overline{AC} = \operatorname{tg}(45^\circ) = 1$  e, assim, as coordenadas do ponto  $C$  são  $(1,1)$ .

Como  $D(-1,0)$  temos que o declive da reta é  $m_{DC} = \frac{0-1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

Então a equação da reta é da forma  $y = \frac{1}{2}x + b$

Utilizando o ponto  $C(1,1)$  vamos obter o valor de  $b$ :

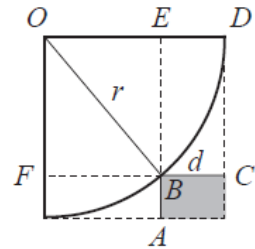
$$1 = \frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

Logo:

**Resposta:** A equação reduzida da reta  $DC$  é  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

7. Vamos utilizar o esquema da figura 8.

Para determinarmos o volume da vasilha (esfera), temos que determinar o valor de  $r$ . Para isso podemos usar o triângulo retângulo  $[OFB]$  em que  $r$  é a medida da hipotenusa.



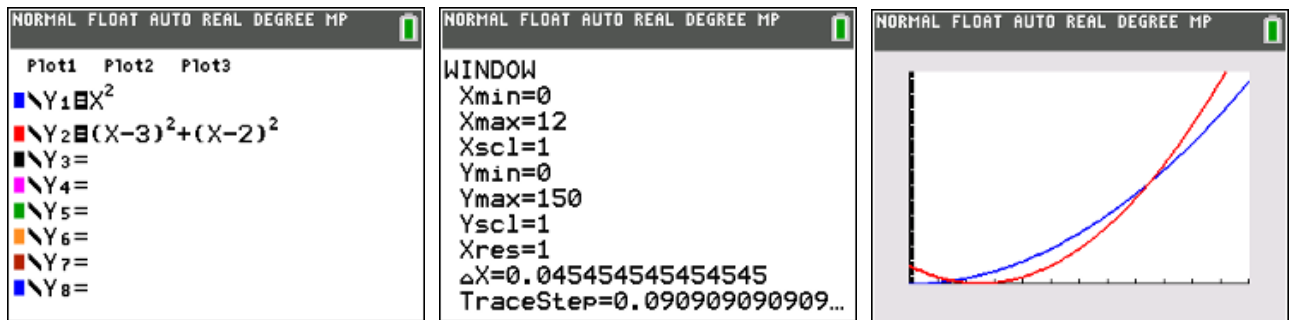
Como  $d = \overline{BC} = 3$ , então  $\overline{FB} = \overline{OD} - \overline{BC} = r - 3$  <sup>(1)</sup>

Como  $\overline{AB} = 2$ , então  $\overline{OF} = r - 2$  <sup>(2)</sup>

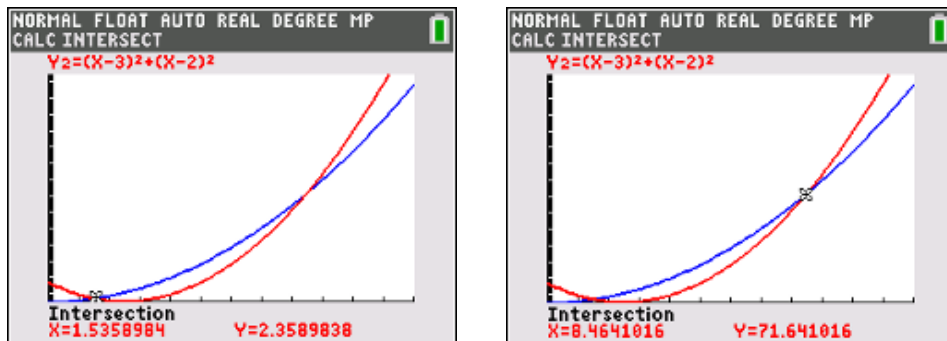
Então podemos afirmar que  $r^2 = (r - 3)^2 + (r - 2)^2$

Podemos resolver esta equação graficamente ou analiticamente.

Utilizemos a calculadora gráfica:



E determinemos, agora, as intersecções dos dois gráficos:



As soluções da equação são assim  $r \approx 1,5359 \vee r \approx 8,4641$ , mas no contexto do problema, como  $r > d$ , temos que ter  $r \approx 8,4641$ .

Desta forma, o volume da esfera é  $V \approx \frac{4}{3} \pi \times 8,4641^3 \approx 2539,98$

Assim sendo concluímos que a capacidade da esfera é menor a  $2600 \text{ dm}^3$

**Resposta:** O comandante tinha razão, como se mostrou na resolução.