

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO**

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2ª FASE – 6 DE SETEMBRO DE 2021

1.

1.1. O centro da superfície esférica é o ponto R de coordenadas $(-5, 5, -3)$.

Como a superfície esférica passa no ponto $Q(-2, 1, 1)$, a medida do comprimento do seu raio é igual a:

$$\overline{RQ} = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16+16} = \sqrt{41}$$

Portanto, uma condição que define a superfície esférica de centro em R e que passa no ponto Q é:

$$(x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = (\sqrt{41})^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

A resposta correta é a opção: (C)

1.2. Seja α o plano perpendicular à reta RS que contém o ponto P .

Como o plano α é perpendicular à recta RS , um vetor normal a α é \overline{RS} . Mas, como o quadrilátero $[PQRS]$ é um trapézio, em que as bases são $[PQ]$ e $[RS]$, vem que os lados $[PQ]$ e $[RS]$ são paralelos e, portanto, os vetores \overline{RS} e \overline{PQ} são colineares, pelo que o vetor \overline{PQ} também é normal a α .

Assim, dado que $\overline{PQ} = Q - P = (-2, 1, 1) - (1, -1, 2) = (-3, 2, -1)$, vem que $\alpha: -3x + 2y - z + d = 0$.

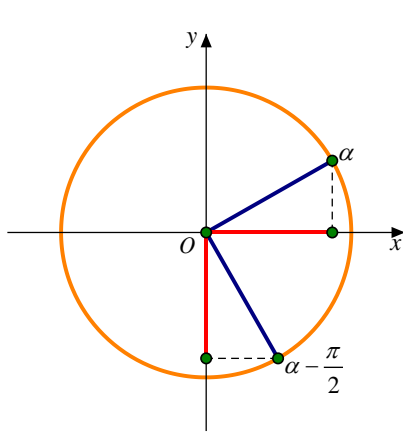
Como $P(1, -1, 2)$ pertence a α , substituindo, vem:

$$-3 \times 1 + 2 \times (-1) - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -3 - 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -7 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

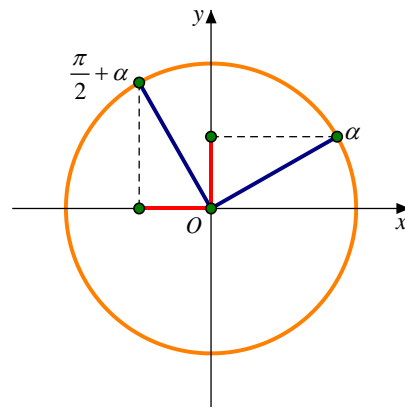
$$\therefore \alpha: -3x + 2y - z + 7 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + z - 7 = 0$$

2. Tem-se que $\text{tg}(\pi - \alpha) = \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg} \alpha$
Período fundamental da tangente é π A função tangente é ímpar

Por outro lado:



$$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$$



$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\left(-\frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \\ &= \cos\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{sen} \alpha \end{aligned}$$

Portanto, como $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$, vem que $-\cos \alpha = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{5}$ e pretende-se determinar o valor de:

$$\text{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{tg} \alpha + 2(-\text{sen} \alpha) = -\text{tg} \alpha - 2\text{sen} \alpha$$

Assim, como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\cos \alpha = \frac{1}{5}$, vem que:

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{24}{25} \quad \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \text{sen} \alpha > 0 \Leftrightarrow \text{sen} \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen} \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} \Leftrightarrow \text{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Finalmente, como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$, vem que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{\cancel{\beta}}}{\frac{1}{\cancel{\beta}}} = 2\sqrt{6}$, pelo que:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2 \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha = -2\sqrt{6} - 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = -2\sqrt{6} - \frac{4\sqrt{6}}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}$$

3.

3.1. O número de casos possíveis é ${}^{12}C_6$, das doze raquetes escolhem-se seis para o primeiro conjunto.

As outras seis vão para o segundo conjunto. (ou $\frac{{}^{12}C_6}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

O número de casos favoráveis é ${}^6C_3 \times {}^6C_3$, para o primeiro conjunto, escolhem-se três raquetes de badminton entre as seis e escolhem-se três raquetes de ténis entre as seis. (ou $\frac{{}^6C_3 \times {}^6C_3}{2}$ se considerarmos os dois conjuntos indistinguíveis)

A probabilidade pedida é $\frac{{}^6C_3 \times {}^6C_3}{{}^{12}C_6} \approx 0,43$.

A resposta correta é a opção: (B)

3.2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A : «o sócio escolhido é mulher»

B : «o sócio escolhido pratica badminton»

Pretende-se determinar a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, ou seja $P(A \cap \bar{B})$. Como $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,65 - P(A \cap B)$, só precisamos de saber o valor de $P(A \cap B)$

Do enunciado sabe-se:

• $P(A) = 65\%$, ou seja, $P(A) = 0,65$, pelo que $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,65 = 0,35$

• $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{7} P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = \frac{1}{7} \times 0,35 \Leftrightarrow P(B \cap \bar{A}) = 0,05$

• $P(A|B) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{5P(B)}{6}$

Preenchendo uma tabela:

	A	\bar{A}	p.m.
B	$\frac{5P(B)}{6}$	0,05	$P(B)$
\bar{B}			
p.m.	0,65	0,35	

$$\text{Logo, } \frac{5P(B)}{6} + 0,05 = P(B) \Leftrightarrow 5P(B) + 0,3 = 6P(B) \Leftrightarrow P(B) = 0,3$$

$$\text{Portanto, } P(A \cap B) = \frac{5P(B)}{6} = \frac{5 \times 0,3}{6} = 0,25, \text{ pelo que:}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,65 - 0,25 = 0,40, \text{ ou seja, } P(A \cap \bar{B}) = 40\%$$

4. Para formar um triângulo com os pontos que estão sobre as rectas temos de escolher dois pontos da recta r e um ponto da recta s , o número de maneiras de o fazer é ${}^5C_2 \times {}^n C_1 = 10n$, ou temos de escolher um ponto da recta r e dois pontos da recta s , o número de maneiras de o fazer é:

$${}^5C_1 \times {}^n C_2 = 5 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{5n(n-1)(\cancel{n-2})!}{2(n-2)!} = \frac{5n(n-1)}{2}$$

Assim, o número de triângulos distintos que se podem formar com os $n+5$ pontos das duas rectas é dado, em função de n , por $10n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{20n + 5n(n-1)}{2}$.

$$\text{Logo, } \frac{20n + 5n(n-1)}{2} = 175 \Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n^2 + 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-70)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -10 \vee n = 7$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem que $n = 7$.

$$5. \text{ Tem-se que } \lim v_n = \lim \left(2 - \frac{5}{n+3} \right) = 2 - \frac{5}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-, \text{ pelo que } \lim g(v_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1.$$

A resposta correta é a opção: (B)

6. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n) .

Sabe-se que $u_6 + u_{20} = -5$ e que $u_9 = 4u_7$. Pretende-se determinar $u_1 + u_2 + \dots + u_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16$.

Tem-se que:

$$\bullet u_{19} = 4u_7 \Leftrightarrow \begin{matrix} u_{19} = u_1 + 18r \\ u_7 = u_1 + 6r \end{matrix} u_1 + 18r = 4(u_1 + 6r) \Leftrightarrow u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \Leftrightarrow -6r = 3u_1 \Leftrightarrow r = -\frac{3u_1}{6} \Leftrightarrow r = -\frac{u_1}{2}$$

$$\bullet u_6 + u_{20} = -5 \Leftrightarrow \begin{matrix} u_6 = u_1 + 5r \\ u_{20} = u_1 + 19r \end{matrix} u_1 + 5r + u_1 + 19r = -5 \Leftrightarrow 2u_1 + 24r = -5 \Leftrightarrow 2u_1 + 24 \times \left(-\frac{u_1}{2}\right) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - 12u_1 = -5 \Leftrightarrow -10u_1 = -5 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} r = -\frac{u_1}{2} \\ r = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$$

Como $u_{16} = u_1 + 15r = \frac{1}{2} + 15 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{13}{4}$, vem que:

$$\text{Assim, } u_1 + u_2 + \dots + u_{16} = \frac{u_1 + u_{16}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{13}{4}}{2} \times 16 = \frac{-\frac{11}{4}}{2} \times 16 = -\frac{11}{8} \times 16 = -11 \times 2 = -22.$$

7. Tem-se que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, pelo que:

$$z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z} \Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{10} + 2\pi\right)} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} e^{i\frac{19\pi}{10}}$$

\therefore Um argumento de w é $\frac{19\pi}{10}$.

A resposta correta é a opção: (A)

8. Tomando $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 10 = 0 \Leftrightarrow (1+2i)(x+yi) + (1-2i)(x-yi) + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

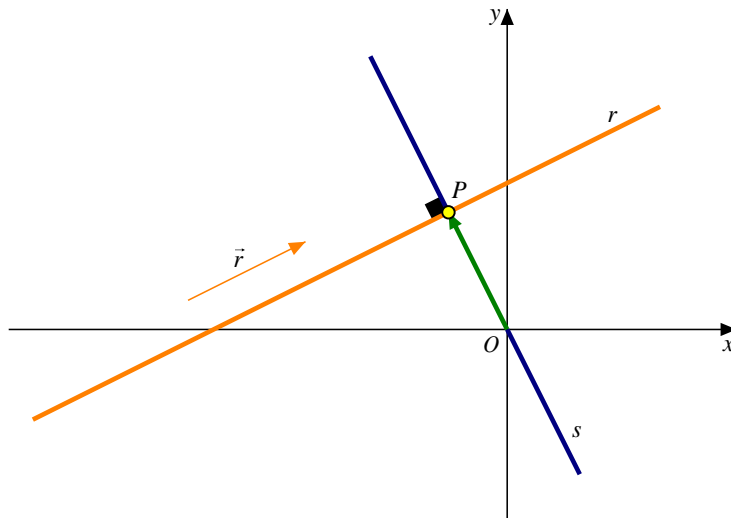
$$\Leftrightarrow x + \cancel{yi} + \cancel{2xi} + 2yi^2 + x - \cancel{yi} - \cancel{2xi} + 2yi^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x + 10 = 4y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Sejam r a reta dada e P o ponto de r .

Determinar o número complexo cujo afixo pertence à reta r e cujo módulo é o menor possível é equivalente a determinar o ponto da reta r cuja distância à origem é mínima, sendo que este ponto é o afixo do complexo pedido.

Assim, sendo \vec{r} um vector director da recta r , a distância de P à origem é mínima se $\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$:



O declive da recta r é $\frac{1}{2}$, pelo que \vec{r} pode ser $\vec{r}(2,1)$. Como P pertence à recta r , vem que as suas

coordenadas são da forma $P\left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right)$ e $\overrightarrow{OP} = P - O = \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) - (0,0) = \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right)$.

Logo, $\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \Leftrightarrow (2,1) \cdot \left(x, \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{x}{2} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 4x + x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5x = -5 \Leftrightarrow x = -1$

Portanto, $P\left(-1, -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)$, ou seja, $P(-1, 2)$, pelo que o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1 + 2i$.

Outra resolução: o ponto P da recta r cuja distância à origem é mínima, é o ponto de intersecção da recta perpendicular à recta r , que contém a origem.

Assim, sendo s essa recta, vem que $m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Como a recta s contém a origem, vem que a sua equação reduzida é $y = -2x$.

Fazendo a intersecção entre as duas rectas, tem-se:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 2)$$

Logo, o número complexo de menor módulo cujo afixo pertence à recta r é $-1 + 2i$.

9.

9.1. Quando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \cancel{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \stackrel{\substack{y = -x \Leftrightarrow x = -y \\ x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty}}{=} 1 - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{-y} = 1 + \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Limite notável}} = 1 + \infty = +\infty$$

Logo, o gráfico de f não tem assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$.

Quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} - 3 \right) \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x + 1} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} - 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - 3 \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \\ \text{Logo, } \sqrt{x^2} = |x| = x}}{=} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(+\infty)^2}}}{1 + \frac{1}{+\infty}} - 3 = \frac{\sqrt{1 + 0}}{1 + 0} - 3 = 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

Logo, a recta de equação $y = -2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$.

9.2. Sendo t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2 , tem-se que o seu declive é dado por $f'(-2)$

Para $x < 0$, tem-se que $f(x) = \frac{x - e^{-x}}{x} = \frac{x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} = 1 - \frac{e^{-x}}{x}$, pelo que, para $x < 0$:

$$f'(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{x}\right)' = 0 - \frac{(e^{-x})'x - e^{-x} \times x'}{x^2} = -\frac{-e^{-x}x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{e^{-x}x + e^{-x}}{x^2} = \frac{e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

Logo, o declive da reta t é igual a $f'(-2) = \frac{e^2(-2+1)}{(-2)^2} = -\frac{e^2}{4}$, pelo que $t: y = -\frac{e^2}{4}x + b$.

As coordenadas do ponto de tangência são $(-2, f(-2)) = \left(-2, 1 + \frac{e^2}{2}\right)$, pois $f(-2) = 1 - \frac{e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$.

Substituindo na equação de t , vem que:

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{2e^2}{4} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow b = 1$$

$$\therefore t: y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

10. Tem-se que:

$$\begin{aligned} \bullet h'(x) &= (\sin x + \cos^2 x)' = \cos x + 2\cos x(\cos x)' = \cos x + 2\cos x(-\sin x) = \cos x - 2\sin x \cos x \\ &= \cos x(1 - 2\sin x) \end{aligned}$$

$$\bullet h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2}$$

No intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $\cos x = 0$ não tem soluções e a equação $\sin x = \frac{1}{2}$ tem apenas uma

solução, que é $\frac{\pi}{6}$, pelo que o único zero de h' é $\frac{\pi}{6}$.

Recorrendo a um quadro de sinal de h' e relacionando com a monotonia de h , tem-se:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$	+	+	0	-	n.d.
h	mín.	\nearrow	máx.	\searrow	n.d.

Logo, h é crescente em $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ e tem:

• mínimo relativo em $x=0$ que é $h(0) = \sin(0) + \cos^2(0) = 0 + 1^2 = 1$

• máximo absoluto em $x = \frac{\pi}{6}$ que é $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

11.

11.1. No instante t_1 a temperatura da substância foi de 30°C , ou seja, $T(t_1) = 30$.

$$\text{Assim, } T(t_1) = 30 \Leftrightarrow 20 + 100e^{-kt_1} = 30 \Leftrightarrow 100e^{-kt_1} = 10 \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-kt_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -kt_1 = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}_{\ln 1 - \ln 10 = -\ln 10} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1}$$

A resposta correta é a opção: (C)

11.2. Para $k = 0,04$, tem-se que $T(t) = 20 + 100e^{-0,04t}$.

A taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é dada por:

$$\frac{T(t_2) - T(0)}{t_2 - 0} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - (20 + 100e^{-0,04 \times 0})}{t_2} = \frac{20 + 100e^{-0,04t_2} - 20 - 100e^0}{t_2} = \frac{100e^{-0,04t_2} - 100}{t_2}$$

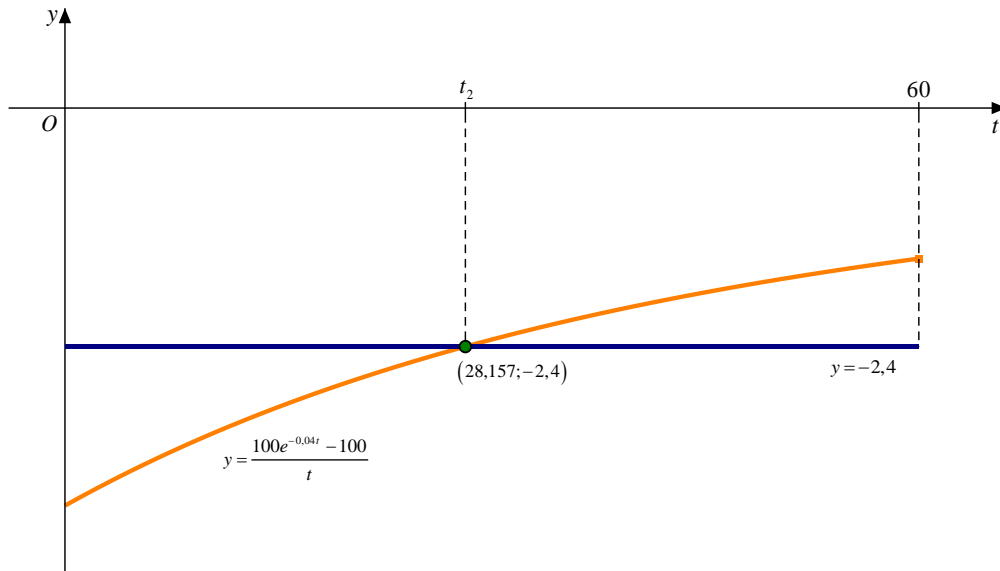
Como a taxa de variação média da função T nos primeiros t_2 minutos é igual a $-2,4$, vem que t_2 é a solução da equação:

$$\frac{T(t) - T(0)}{t - 0} = -2,4 \Leftrightarrow \frac{100e^{-0,04t} - 100}{t} = -2,4$$

Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se:

$$y_1 = \frac{100e^{-0,04t} - 100}{t} \quad \text{e} \quad y_2 = -2,4$$

na janela $[0, 60] \times [-4, 0]$:



Logo, $\frac{100e^{-0,04t} - 100}{t} = -2,4 \Leftrightarrow t = t_2$, em que $t_2 \approx 28,157$.

Como $0,157 \times 60 \approx 9$ segundos, o instante t_2 corresponde, aproximadamente, a 28 min e 9 s.

12. Como $0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vem que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe se $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

Assim:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\cancel{x}(x^2 - 1)}{\cancel{x}(x - 1)} + k \right) = \frac{0^2 - 1}{0 - 1} + k = \frac{-1}{-1} + k = k + 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} 2 + \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \ln \left(\frac{1}{y} \right) \right) \stackrel{\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = -\ln y}{=} 2 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Limite notável}} = 2 - 0 = 2$$

Logo, $k + 1 = 2 \Leftrightarrow k = 1$.

13. Tem-se que:

$$\bullet D = \{x \in \mathbb{R} : 1-x > 0 \wedge 3-2x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \wedge x < \frac{3}{2}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} =]-\infty, 1[$$

• Neste domínio D , tem-se:

$$x \ln(1-x) - \ln(1-x) = (1-x) \ln(3-2x) \wedge x \in D \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\ln(1-x)(1-x) = (1-x) \ln(3-2x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-x) \ln(1-x) + (1-x) \ln(3-2x) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 0 = (1-x) (\ln(1-x) + \ln(3-2x)) \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow 1-x=0 \vee \ln((1-x)(3-2x))=0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee (1-x)(3-2x)=e^0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee 3-2x-3x+2x^2=1 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee 2x^2-5x+2=0 \wedge x \in D$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \wedge x \in D$$

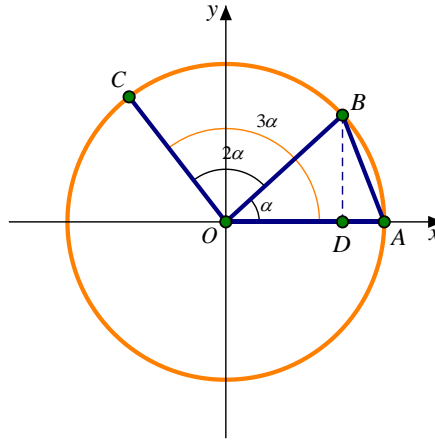
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x = \frac{1}{2} \vee x=2 \wedge x \in D$$

Como $1 \notin D$, $2 \notin D$ e $\frac{1}{2} \in D$, vem que o conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

14. Seja α a amplitude do ângulo AOB .

Como a amplitude do ângulo BOC é o dobro da amplitude do ângulo AOB , vem que a amplitude do ângulo BOC é 2α , pelo que a amplitude do ângulo AOC é $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Consideremos a seguinte figura, em que D é a projeção ortogonal do ponto B no eixo Ox :



Assim, a ordenada do ponto C é dada por $\sin(3\alpha)$ e como a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k , vem que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \frac{1 \times \overline{BD}}{2} = k \Leftrightarrow \overline{BD} = 2k$$

Logo, $\sin \alpha = \frac{\overline{BD}}{1} \Leftrightarrow \overline{BD} = \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = 2k$ e portanto:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (2k)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 4k^2$$

Então, a ordenada do ponto C é dada por:

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cos \alpha = \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \overbrace{\cos \alpha}^{\cos^2 \alpha} \cos \alpha = \\ &= 2k(1 - 4k^2 - 4k^2) + 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) = 2k(1 - 8k^2) + 4k(1 - 4k^2) \\ &= 2k - 16k^3 + 4k - 16k^3 = 6k - 32k^3 \end{aligned}$$