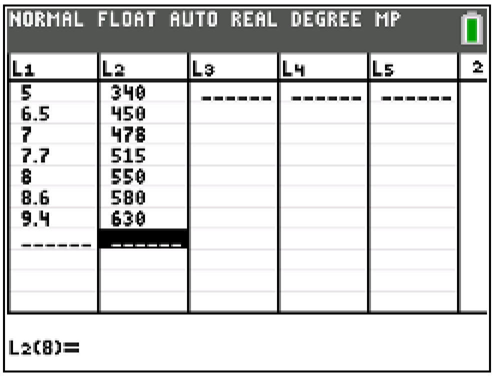
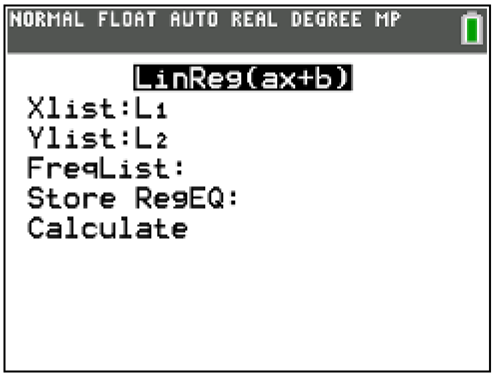
mathniversity®
promovemos o teu sucesso na matemática

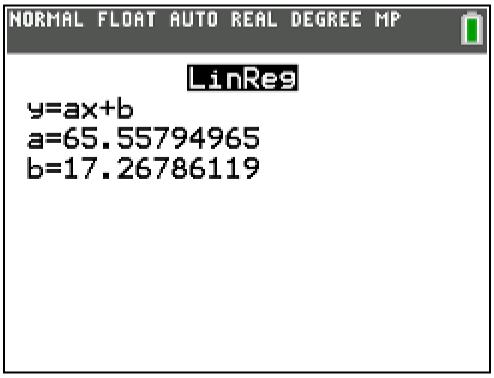
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 25 DE JULHO 2022

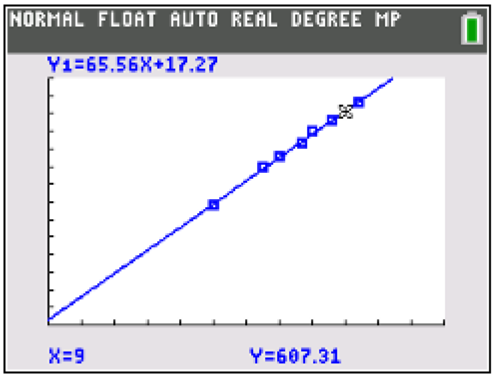
1. Editemos os dados que nos são fornecidos em duas listas da calculadora, em vista à obtenção dos parâmetros necessários à definição da equação da reta de regressão linear entre as duas variáveis.







Obtidos os parâmetros podemos editar a equação da reta em vista à obtenção do seu gráfico e, a partir dele, a imagem de 9.



Resposta: Para um treino com 9 Km de corrida é de estimar que sejam gastas 607 calorias.

2. Sabemos que $P(Y=0)=\frac{9}{65}$, logo temos que $P(X=2)=\frac{9}{65}$

Também sabemos que $P(Y=1)=\frac{32}{65}$, logo $P(X=1)=\frac{32}{65}$

Como a variável X só toma os valores 0, 1 ou 2, podemos concluir que $P(X=0)=1-\left(\frac{32}{65}+\frac{9}{65}\right)=\frac{24}{65}$

A tabela de distribuição de probabilidades da variável X é então:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{24}{65}$	$\frac{32}{65}$	$\frac{9}{65}$

Valor médio: $\mu=\frac{24}{65}\times 0+\frac{32}{65}\times 1+\frac{9}{65}\times 2=\frac{50}{65}\approx 0,7692$

Resposta : O valor médio de X é, aproximadamente, $0,77$

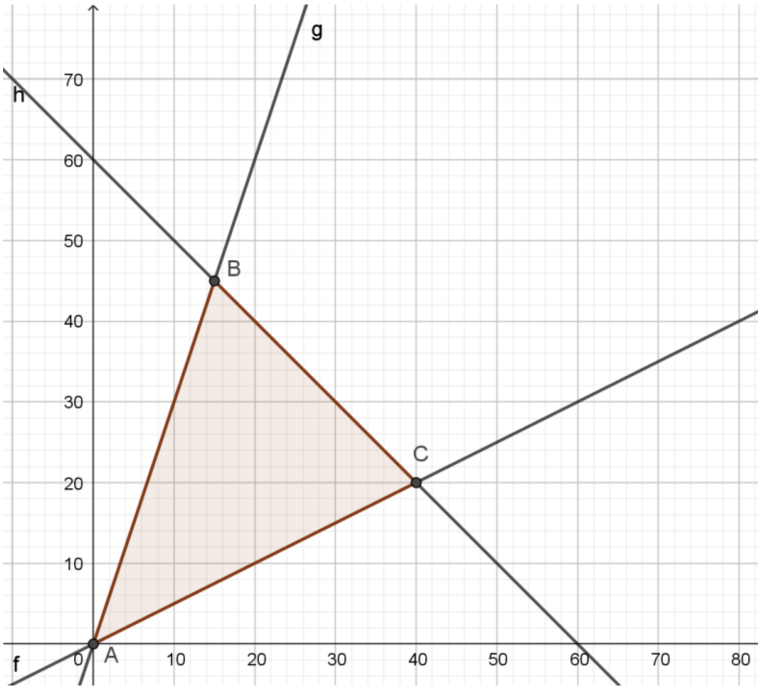
3. A função objetivo, que se pretende maximizar, é $L(x,y)=150\,000\,x+250\,000\,y$

Quanto às restrições, a relação entre o número de apartamentos T2 e T3 obriga a que $x\le 2y$ e que $y\le 3x$. Quanto ao total de apartamentos, a restrição é $x+y\le 60$.

Tendo em conta as restrições óbvias $x\ge 0\ e\ y\ge 0$ e as mencionadas anteriormente, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x\le 2y \\ y\le 3x \\ x+y\le 60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge \dfrac{x}{2} \\ y\le 3x \\ y\le -x+60 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é:



Os vértices da região admissível, excluindo a origem (que anula, obviamente a função objetivo), obtém-se por interseção das retas que a definem e são $B(15,45)$ e $C(40,20)$

Averiguemos agora qual a solução ótima:

$L(15,45) = 150\,000 \times 15 + 250\,000 \times 45 = 13\,500\,000$

$L(40,20) = 150\,000 \times 40 + 250\,000 \times 20 = 11\,000\,000$

Resposta: O valor máximo que a empresa pode obter é 13 500 000 € correspondente à venda de 15 apartamentos T2 e 45 T3.

4.

4.1. Condição A): $p = 0$

$N(0) = -\dfrac{1}{50} \times 0 + 60 = 60$ o que corresponde ao arrendamento dos 60 apartamentos.

Condição B): $p = 3000$

$N(3000) = -\dfrac{1}{50} \times 3000 + 60 = -60 + 60 = 0$ o que significa se arrendada zero apartamentos.

Condição C): Calculemos o valor de N para $p+50$:

$$N(p+50) = -\frac{1}{50}\times(p+50)+60 =$$
$$= -\frac{1}{50}p - \frac{50}{50} + 60 = -\frac{1}{50}p + 60 - 1$$
$$= N(p) - 1$$

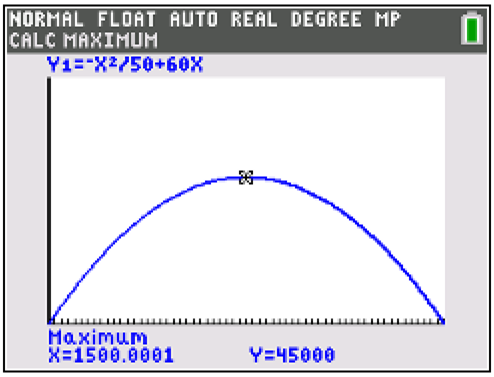
o que significa que se a renda aumentar 50€ arrenda-se menos um apartamento, para qualquer valor de p com $0 < p < 3000$.

Ficam assim verificadas as três condições.

4.2. Temos que encontrar o máximo da função $R(p)$ com $0 \leq p \leq 3000$

$$R(p) = p \times N(p) = p \times \left(-\frac{1}{50}p + 60\right) = -\frac{1}{50}p^2 + 60p$$

Editemos esta função na calculadora gráfica, tendo em conta o seu domínio, e determinemos o máximo:



Resposta: O rendimento será máximo quando $p = 1500$, isto é, quando a renda for de 1500€.

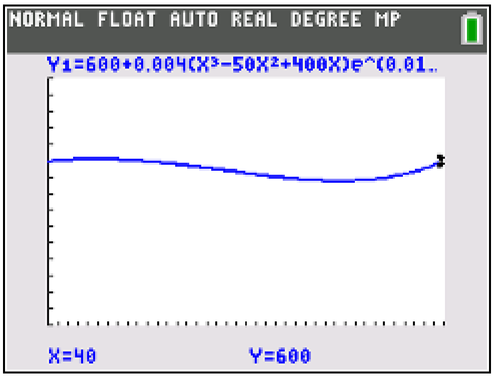
5.

5.1. A diferença pretendia será dada pela diferença entre $f(0)$ e $f(40)$

Podemos editar a função na calculadora e obter $f(40)$, uma vez que é fácil obter

$$f(0) = 600 + 0,004(0 - 0 + 0)e^{-1} = 600$$

Recorrendo à calculadora gráfica:



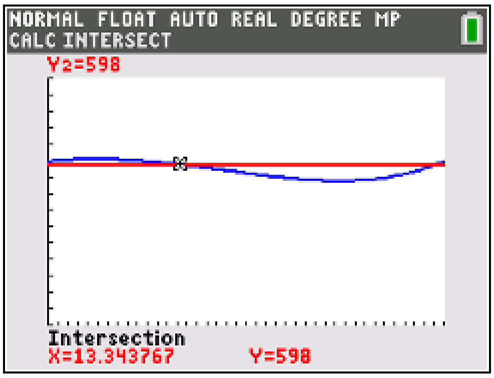
$$f(0) - f(40) = 600 - 600 = 0$$

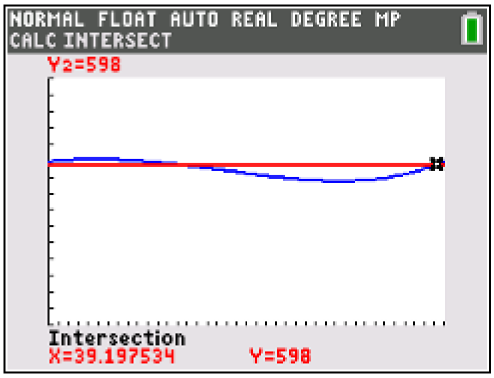
Resposta: a diferença de altitudes é nula.

5.2. Para além da função, editemos também na calculadora a reta de equação $y = 598$

Temos que usar uma janela de visualização adequada, por exemplo, fazendo $x \in [0, 40]$ e $y \in [500, 650]$

Vejamos os gráficos e as interseções necessárias:





Tendo em conta as abcissas dos pontos de interseção, vemos que a altitude é superior a 598, até aos $13,3438$ Km e a partir dos $39,1975$ km

Ora $40 - 39,1975 = 0,8025$

$13,3438 + 0,8025 = 14,1463 \approx 14,1$ Km

Resposta: Durante 14,1 Km a altitude foi superior a 598 metros.

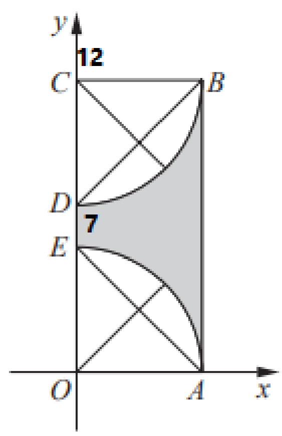
6. A taxa de variação instantânea corresponde à derivada de uma função. Então, temos que relacionar o sinal da função T , com a monotonia da função original, função que nos dá a velocidade da bicicleta. Podemos registar isso numa tabela, utilizando a informação que recolhemos do gráfico de T :

x	0		16		32		35
sinal de T	0	+	0	–	0	–	–
Monotonia da velocidade		$\nearrow$	máx	$\searrow$		$\searrow$	

Resposta: O valor da velocidade foi máximo aos 16 minutos de treino.

7.

7.1. A partir dos dados do problema podemos completar a imagem de um azulejo, em referencial ortogonal, da forma representada à direita.



Podemos concluir que o comprimento do retângulo *[0ABC]* é 12 cm, uma vez que a ordenada de C é 12 e, como a ordenada de D é 7, pois corresponde à ordenada na origem da reta de equação $y = x + 7$, a sua largura é igual a $\overline{OA} = \overline{OC} - \overline{OD} = 12 - 7 = 5$ cm.

Desta forma a área do retângulo *[0ABC]* = 5× 12 = 60 cm^2.

Por outro lado, no azulejo visualizamos dois quartos de uma circunferência centrada na origem e de raio $\overline{OA} = \overline{CD} = 5$. Estes dois quartos de circunferência formam uma semicircunferência, cuja área do semicírculo correspondente é:

Área do semicírculo = $\frac{\pi \times 5^2}{2} = \frac{25\,\pi}{2}$

A região a sombreado é dada por:

Área retângulo [0ABC] – Área do semicírculo = $60 - \frac{25\,\pi}{2} \approx 20{,}73\ cm^2$

Como o friso é composto por 5 azulejos, temos que a área da região sombreada correspondente aos cinco azulejos é:

$$5 \times 20{,}73 \approx 104\ cm^2$$

Resposta: A área da região sombreada é 104 cm^2

7.2. Para que o retângulo $[RSTQ]$ seja o transformado do retângulo $[UPQT]$ é necessário que a rotação seja tal que transforme U em R, P em S, Q em T e T em Q.

Ora isso só acontece se a rotação tiver centro no ponto médio de $[TQ]$ e amplitude 180°, seja no sentido horário ou no sentido anti-horário.

Resposta: O centro de rotação é o ponto médio de $[TQ]$ e a amplitude é 180° ou -180°.

8.

8.1. Verifica-se que na etapa 2, a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 1. Na etapa 3 a área do quadrado é metade da área do quadrado da etapa 2 e assim sucessivamente.

Conclui-se assim que as áreas dos sucessivos quadrados formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Como a área do quadrado da etapa 1 é L^2, a área do quadrado de ordem n é dada, em centímetros quadrados, por:

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{, tal como se pretendia mostrar.}$$

8.2. Tem-se que $A_{12} = \frac{1}{2}$, logo,

$$L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = \frac{1}{2} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \Leftrightarrow L^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10}$$

$$\Leftrightarrow L^2 = 2^{10} \Leftrightarrow L = 2^5 = 32 \text{ porque } L > 0.$$

Resposta: $L = 32$ cm.

9.

9.1. Tem-se que:

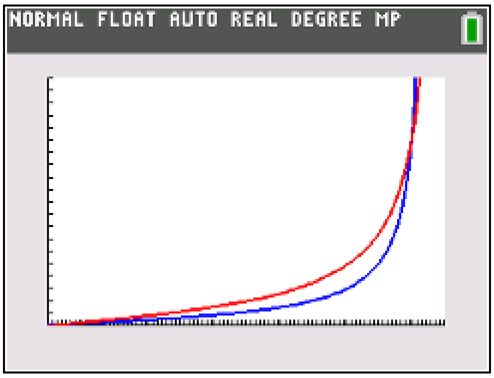
$$tg\ \beta = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{2.\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2 \times \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 2.tg\ \alpha$$

Conclui-se assim, como queríamos mostrar, que: $tg\ \beta = 2.tg\ \alpha$

9.2. Como $\beta = \alpha + 3{,}75^o$, tem-se que:

$$tg\ (\alpha + 3{,}75^o) = 2.tg\ \alpha$$

Colocando na calculadora gráfica as expressões $y_1 = tg\left(x+3.75\right)$ e $y_2 = 2tg\left(x\right)$ obtém-se as seguintes representações gráficas:



Existem dois pontos de interseção.: $A(3{,}783; 0{,}132)$ e $B(82{,}467; 15{,}125)$, logo tem-se que as soluções da equação para $\alpha \in \left]0^o, 90^o\right[$ *são* $\alpha \approx 3{,}783$ ou $\alpha \approx 82{,}467$.

Como o enunciado refere que se pretende os minutos do **pôr do sol** para os quais tem início a observação da duplicação das sombras, tal só pode ocorrer quando $\alpha \approx 82{,}467$ e assim sendo as horas pretendidas são dadas por $\frac{90^o - 82{,}467^o}{15^o} \approx 0{,}5022$, o que corresponde a 30 minutos aproximadamente.

Resposta: A observação tem início a, aproximadamente, 30 minutos do pôr do sol.