mathniversity®

promovemos o teu sucesso na matemática

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 835) – 2.ª FASE – JULHO 2022

1.

1.1. Da observação do diagrama podemos preencher a totalidade da tabela apresentada:

Votos **Preferência**	3	4	4	6	6	7
1.ª	A	A	B	B	C	C
2.ª	B	C	A	C	B	A
3.ª	C	B	C	A	A	B

Aplicando o método descrito para determinar qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo, começando por comparar as votações dos candidatos A e C, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Candidatos A e C	Candidato A $3+4+4=11$	Candidato C $6+6+7=19$	Candidato C
Candidatos C e B	Candidato C $4+6+7=17$	Candidato C $3+4+6=13$	Candidato C

Como o Carlos (candidato C) venceu em todas as comparações com os restantes, foi eleito como novo diretor do parque de campismo.

1.2. A probabilidade condicionada $P(R|S)$ significa a probabilidade de escolher, ao acaso, um dos votos, e ele ter assinalado como primeira preferência o candidato B, sabendo que tem assinalado como segunda preferência o candidato A.

Assim, identificando o número de votos tem assinalado como segunda preferência o candidato A, são $4+7=11$ (correspondentes à 3.ª e última colunas da tabela anterior).

Considerando estes 11 votos, podemos verificar que apenas em 4 votos (correspondentes à 3.ª coluna da tabela anterior) tem assinalado como primeira preferência o candidato B, e assim temos que $P(R|S)=\dfrac{4}{11}$

Resposta: **Opção A**

2. De acordo com o método descrito, e com os dados do enunciado, temos que:

Primeira volta					
Ordem	Manuel	Tomás	Lara	Vasco	Paula
Retificou		✓			
Parcela atribuída		✓			

(Como a Lara começou a segunda volta, a parcela foi atribuída ao Tomás na primeira volta)

Segunda volta				
Ordem	Lara	Vasco	Paula	Manuel
Retificou		✓		
Parcela atribuída		✓		

(Na segunda volta a parcela foi atribuída ao Vasco)

Terceira volta			
Ordem	Paula	Manuel	Lara
Retificou		✓	✓
Parcela atribuída			✓

(Como na terceira volta houve retificações por parte de dois responsáveis, foram o Manuel e Lara, e a parcela foi atribuída à Lara por estar no papel do responsável E)

Assim, temos que:

- (1) Na primeira volta, a parcela foi atribuída ao **Tomás**.
- (2) Na segunda volta, a **Paula** e o **Manuel** pronunciaram-se, concordando com a divisão, após a parcela ter sido retificada pelo Vasco.
- (3) A **Paula** iniciou a terceira volta.
- (4) Na terceira volta, foi atribuída uma parcela do mapa do recinto à **Lara**.
- (5) Na terceira volta, o **Manuel** e a **Lara** retificaram a parcela.
- (6) A **Paula** nunca retificou qualquer parcela.
- (7) O **Tomás** nunca iniciou qualquer volta.

Ou seja, as afirmações correspondentes a cada um dos responsáveis indicados são:

- **Lara**: 4,5
- **Paula**: 2,3,6
- **Tomás**: 1,7

3. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta A-B - distância 310 (menor comprimento)

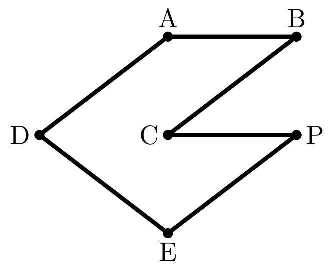
   II - Aresta A-D - distância 365

   III - Aresta C-P - distância 366
   (não se considera a aresta A-P, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   IV - Aresta E-P - distância 380
   (não se considera a aresta B-D, porque se formaria um percurso fechado sem todos os vértices B-D-A-B)

   V - Aresta B-C - distância 550
   (não se considera a aresta A-E, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   VI - Aresta D-E - distância 605



   Desta forma, um itinerário, com início e fim no portão do parque, que passe pelos cinco ecopontos, é, por exemplo:

   $$\text{P - E - D - A - B - C - P}$$

   (o mesmo itinerário em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

4. Como os *bungalows* foram usados na sua capacidade máxima, o número de pessoas que ficou em tendas, ou seja, que não ficou em *bungalows*, foi de:

   $$140 - 8 \times 4 - 10 \times 6 = 48$$

   Assim, o valor faturado à empresa pelo aluguer dos espaços é a soma de três parcelas:

   - 8 *bungalows* M: $8 \times 80 = 64$ €
   - 10 *bungalows* G: $10 \times 100 = 1000$ €
   - 12 tendas com 48 pessoas: $12 \times 6{,}5 + 48 \times 5{,}5 = 904$ €

   Ou seja, o valor faturado foi de: $64 + 1000 + 904 = 1982$ €

   Como o lucro foi de 25% do valor faturado temos que o lucro, em euros, obtido com o evento foi de:

   $$1718 \times 0{,}25 = 495{,}5 \text{ €}$$

5.

   5.1. Temos que o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago:

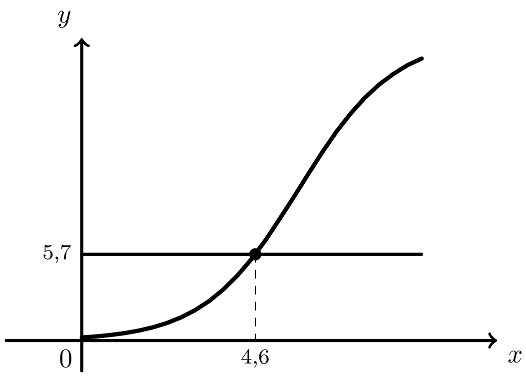
   - três anos após o início do ano 2000, era $A(3) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 3}} \approx 2{,}00379$
   - seis anos após o início do ano 2000, era $A(6) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0{,}8\times 6}} \approx 11{,}02083$

   Assim, neste período, o aumento foi de $A(6) - A(3) \approx 11{,}02083 - 2{,}00379 \approx 9{,}01704$ centenas de peixes, a que corresponde um aumento percentual, a, com arredondamento às unidades, dado por:

   $$\frac{2{,}00379}{9{,}01704} = \frac{100}{a} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 9{,}01704}{200} \Leftrightarrow a \approx 450\%$$

5.2. Como o número aproximado de peixes da espécie A existentes no lago no início do ano 2002 era 95, porque $A(6) = \dfrac{20}{1 + 99e^{-0,8\times 6}} \approx 0{,}95294$, então este número foi, pela primeira vez, seis vezes maior quando atingiu o valor de $6 \times 95 = 570$, ou seja 5,7 centenas.

Assim, usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção da representação gráfica do modelo com a reta, representamos o gráfico da função $y = \dfrac{20}{1 + 99e^{0,8x}}$ e a reta $y = 5{,}7$, numa janela ajustada, obtemos o valor aproximado (com arredondamento às décimas) das coordenadas do ponto de interseção: $(4{,}6\,;\,5{,}7)$



Desta forma, temos que o número de peixes da espécie A foi, pela primeira vez, seis vezes maior do que o número de peixes existentes no início do ano 2002, 4,6 anos após o início de 2002, ou seja durante o ano de 2004.

5.3. Como o número de peixes da espécie A existentes no lago, em centenas, t anos após o início do ano 2000, é bem aproximado pelo modelo $A(t) = \dfrac{20}{1 + 99e^{0,8t}}$ temos que o número máximo de peixes desta espécie se aproxime de 20 centenas, ou seja dos 2000 peixes.

Assim, o número máximo de peixes da espécie B deve aproximar-se de 4000 (o dobro da espécie A) pelo que apenas os gráficos das opções (C) e (D) podem representar o modelo que aproxima o número de peixes da espécie B ao longo do tempo.

Adicionalmente, como $t = 0$ corresponde ao início de 2000 e o modelo deve reportar-se ao início de 1997, a que corresponde $t = -3$, o gráfico deve estar representado para valores de t superiores ou iguais a -3 ($t \geq -3$), pelo que das duas opções anteriores, apenas o gráfico da opção (D) pode representar o modelo pretendido.

Resposta: **Opção D**

6. Temos que:

- de acordo com a informação do gráfico circular, como existiam 200 lugares ocupados, e 70% eram ocupados por tendas, esta percentagem corresponde a $200 \times 0{,}7 = 140$
- de acordo com a informação da tabela e com o valor anterior, o número de lugares ocupados por automóveis era de $200 - 140 - 20 = 40$

Como existem 125 lugares para automóveis e só estavam ocupados 40, a percentagem, p, correspondente é dada por:

$$\frac{125}{40} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 40}{125} \Leftrightarrow p = 32\%$$

7.

7.1. Identificando o máximo e o mínimo dos conjuntos de dados de cada diagrama, podemos determinar as respetivas amplitudes:

- (A) $30 - 18 = 12$
- (B) $31 - 12 = 19$
- (C) $39 - 14 = 25$
- (D) $31 - 12 = 19$

Assim, temos que apenas os diagramas das opções (B) e (D) podem representar as idades daquele grupo de pessoas. Adicionalmente podemos verificar que ambos os diagramas representam um conjunto com 14 dados, pelo devemos verificar em qual dos diagramas a média é 20:

- (B) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 2 + 13 \times 2 + 15 \times 3 + 20 + 21 + 22 + 30 \times 2 + 31 \times 2}{14} = 20$
- (D) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 3 + 13 \times 2 + 15 \times 2 + 17 + 18 + 19 + 21 \times 2 + 22 + 31}{14} \approx 17{,}2$

Resposta: **Opção B**

7.2. Designando por b o número de pessoas do grupo B, temos que:

- o número total de pessoas é: $14 + b$
- a soma das idades de todas as pessoas é: $20 \times 14 + 18 \times b$

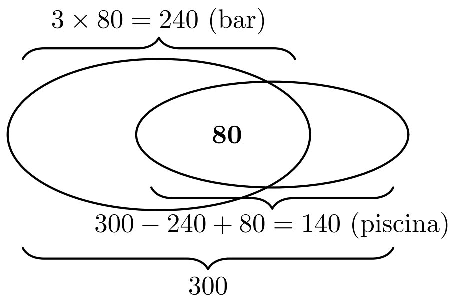
Assim, como a média dos dos dois grupos é 18,7, o valor de b, é dado por:

$$\frac{20 \times 14 + 18 \times b}{14 + b} = 18{,}7 \Leftrightarrow 280 + 18b = 18{,}7(14 + b) \Leftrightarrow 280 + 18b = 261{,}8 + 18{,}7b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 280 - 261{,}8 = 18{,}7b - 18b \Leftrightarrow 18{,}2 = 0{,}7b \Leftrightarrow \frac{18{,}2}{0{,}7} = b \Leftrightarrow 26 = b$$

8.

8.1. Como dos clientes que usufruíram do bar, a terça parte também usufruiu da piscina, a terça parte corresponde aos 80 clientes que usufruíram de ambas as comodidades, pelo que o número total de clientes que usufruíram do bar é o triplo dos que usufruíram das duas comodidades, ou seja, $3 \times 80 = 240$.



Como o conjunto analisado tinha 300 clientes que usufruíram de, pelo menos, uma das duas comodidades referidas, e como 80 clientes tinham usufruído de ambas as comodidades, os que usufruíram da piscina são os que não usufruíram do bar $(300 - 240 = 60)$ acrescidos dos que usufruíram de ambas as comodidades: $60 + 80 = 140$.

8.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma dos clientes presentes naquela altura do ano, e os acontecimentos:
E:≪O cliente ser estrangeiro≫
Pi:≪O cliente ter usufruído da piscina≫

Temos, de acordo com o enunciado, que: $P(E) = 0{,}6$, $P\left(E \cap \overline{Pi}\right) = 0{,}3$ e $P\left(\overline{Pi}|\overline{E}\right) = 0{,}8$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P\left(\overline{Pi} \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{Pi}|\overline{E}\right) \times P\left(\overline{E}\right) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$
- $P\left(\overline{Pi}\right) = P\left(E \cap \overline{Pi}\right) + P\left(\overline{Pi} \cap \overline{E}\right) = 0{,}3 + 0{,}32 = 0{,}62$

	E	$\overline{E}$	
Pi			
$\overline{Pi}$	0,3	0,32	0,62
	0,6	0,4	1

Desta forma a probabilidade, na forma de dízima, de uma dos clientes, escolhida ao acaso, ter usufruído da piscina, é:

$$P(Pi) = 1 - P\left(\overline{Pi}\right) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$$

9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, considerando o valor n para a dimensão da amostra e os valores:

- A média amostral: $\overline{x}$
- O desvio padrão amostral: $s \approx 5{,}5$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, temos:

$$\left] \overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} , \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \right[$$

E assim, a amplitude do intervalo, em função de n, é:

$$\overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \left(\overline{x} - 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} \right) = \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} - \overline{x} + 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = 2 \times 1{,}645 \times \frac{5{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{18{,}095}{\sqrt{n}}$$

Como a amplitude do intervalo de confiança é 0,3619, temos que a a dimensão da amostra correspondente é a solução da equação

$$\frac{18{,}095}{\sqrt{n}} = 0{,}3619$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = \frac{18{,}095}{\sqrt{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o valor de x que verifica a condição anterior, ou seja, a solução da equação, isto é, $x = 2500$

X	Y1
2497	0,36211
2498	0,36204
2499	0,36197
2500	0,3619
2501	0,36182
2502	0,36176
2503	0,36168

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para verificar as condições do enunciado é:

$$n = 2500$$