

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO
SECUNDÁRIO**

(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 24 DE JULHO 2023

1. Seja x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e y o número de quilogramas de concentrado do tipo II.

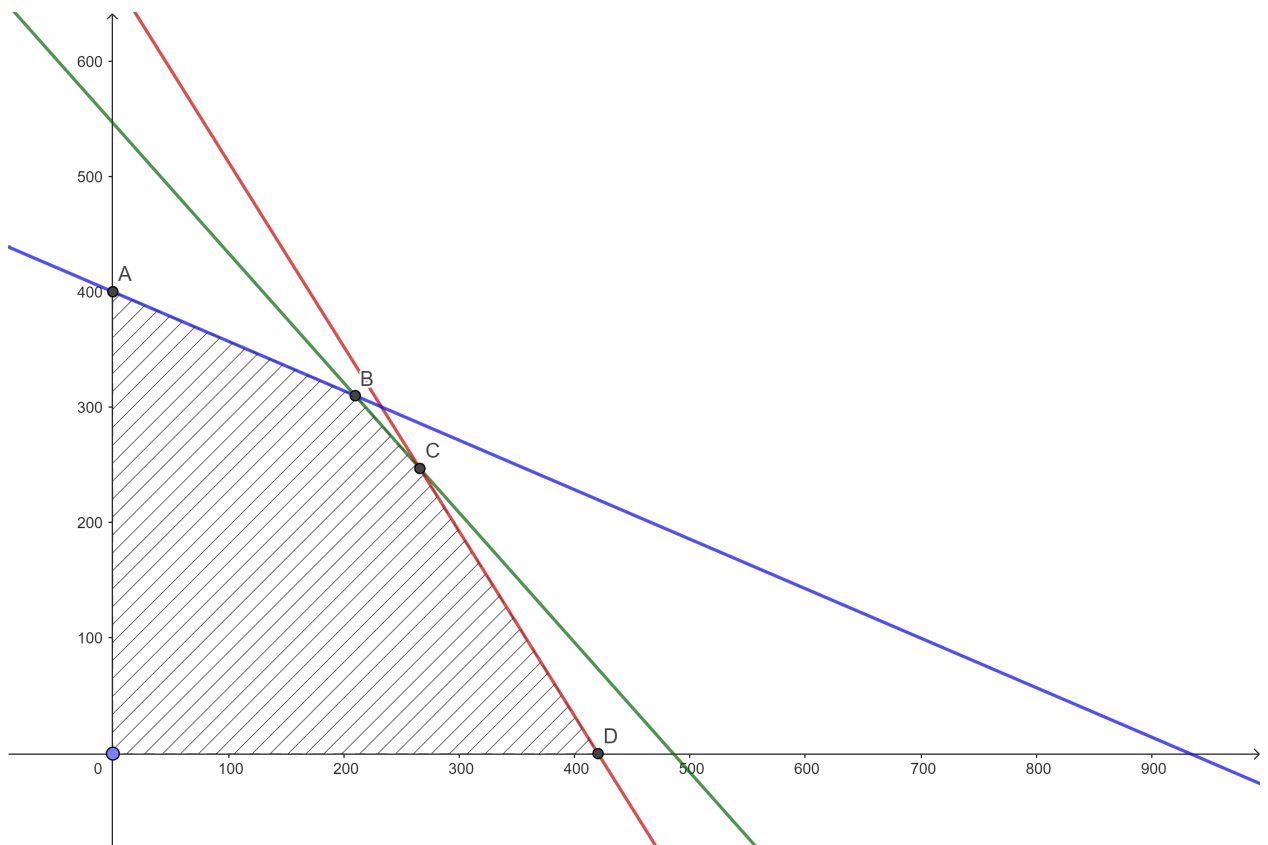
A função objetivo, que se pretende maximizar, é $R(x, y) = 2,5x + 3y$.

Quanto às restrições, a condição relativa à quantidade de maçã é $0,45x + 0,4y \leq 218,5$; relativamente à quantidade de pera é $0,4x + 0,25y \leq 168,15$ e à quantidade de romã é $0,15x + 0,35y \leq 140$.

Tendo ainda em conta as restrições óbvias $x \geq 0$ e $y \geq 0$, obtemos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,45x + 0,4y \leq 218,5 \\ 0,4x + 0,25y \leq 168,15 \\ 0,15x + 0,35y \leq 140 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \leq \frac{-0,45x + 218,5}{0,4} \\ y \leq \frac{-0,4x + 168,15}{0,25} \\ y \leq \frac{-0,15x + 140}{0,35} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right.$$

Desta forma, a representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições é a representada em baixo, em que A , B , C e D são os seus vértices.



As coordenadas dos vértices obtêm-se por interseção das retas que definem a região admissível e, excetuando a origem do referencial: são: $A(0, 400)$, $B(210, 310)$, $C(266, 247)$ e $D(420, 375; 0)$

Calculando o valor da função objetivo nos vértices da região admissível assinalados pelas suas coordenadas, averiguamos a solução ótima:

$$R(0, 400) = 2,5 \times 0 + 3 \times 400 = 1200$$

$$R(210, 310) = 2,5 \times 210 + 3 \times 310 = 1455$$

$$R(266, 247) = 2,5 \times 266 + 3 \times 247 = 1406$$

$$R(420, 375; 0) = 2,5 \times 420,375 + 3 \times 0 = 1050,94$$

Desta forma, concluímos que o valor de vendas máximo é de 1455 euros, obtido no ponto B .

Resposta: para a empresa ter o valor de vendas total máximo deve produzir 210 Kg de concentrado do tipo I e 310 Kg de tipo II.

2. A probabilidade do jardim não ser regado é dada por: $P(X = 0)$.

Ora, temos que:

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= 1 - P(X \geq 1) \\ &= 1 - (0,01 + 0,02 + 0,05 + 0,09 + 0,41 + 0,21 + 0,21) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Resposta: A probabilidade do Sr. Ferreira não regar o jardim é zero.

3.

3.1. De acordo com o padrão de escrita das letras, observamos que o número de círculos preenchidos por cada letra segue a sequência 2, 4, 6, 8, ... correspondente à sucessão dos números pares.

O termo geral desta sucessão é $l(n) = 2n$

Então com a 15ª letra do alfabeto serão preenchidos $2 \times 15 = 30$

Resposta: Serão assinalados 30 círculos.

3.2. A sucessão dos números pares é uma progressão aritmética de razão 2.

Sabemos que o total de círculos assinalados é 72. Então, usando a expressão para a soma de n termos de uma progressão aritmética onde desconhecemos o n -ésimo termo, temos:

$$\begin{aligned}\frac{2 + 2n}{2} \times n = 72 &\Leftrightarrow (1 + n) \times n = 72 \\ &\Leftrightarrow n + n^2 = 72 \\ &\Leftrightarrow n^2 + n - 72 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = -9 \vee n = 8\end{aligned}$$

Atendendo a que n é um número natural temos que $n = 8$, o que significa que a letra escrita no último círculo foi a 8ª letra do alfabeto.

Resposta: A letra escrita foi a H.

4.

4.1. O crescimento no primeiro ano é dado por $h(1) - h(0)$.

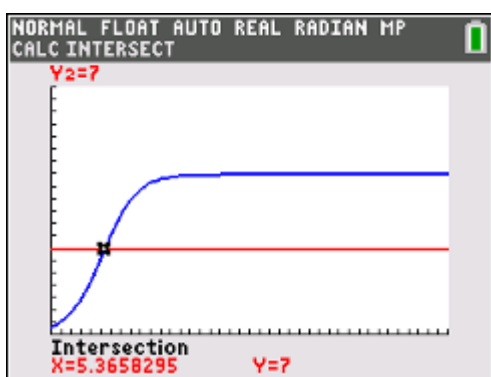
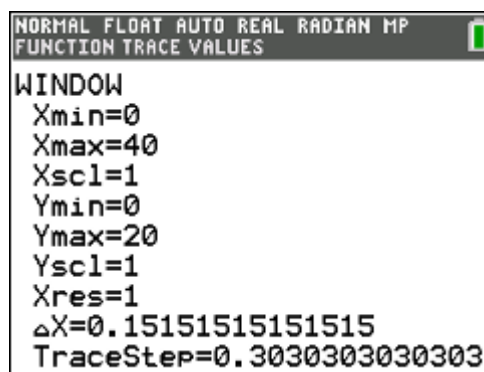
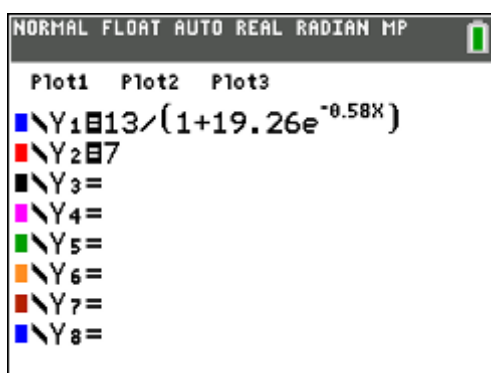
$$h(0) = \frac{13}{1 + 19,26e^{-0,58 \times 0}} = \frac{13}{20,26} \approx 0,642$$

$$h(1) = \frac{13}{1 + 19,26e^{-0,58 \times 1}} = \frac{13}{1 + 19,26e^{-0,58}} \approx 1,103$$

$$h(1) - h(0) \approx 1,103 - 0,642 \approx 0,461 \text{ metros}$$

Resposta: No primeiro ano a árvore cresceu, aproximadamente, 46 cm.

4.2. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, esboçamos o gráfico da função h e da reta $y = 7$ com vista à resolução da equação $h(t) = 7$



A curva correspondente ao gráfico da função h , que é crescente, intersesta a reta de equação $y = 7$ no ponto de abscissa $x \approx 5,3658$.

Isso corresponde a $5 + 0,3658$ anos.

$$0,3658 \times 12 = 4,416 \approx 4 \text{ meses}$$

Resposta: A árvore ultrapassa os 7 metros de altura no decurso do quinto mês após 5 anos de ter sido plantada.

4.3. A função é um modelo logístico que admite uma assintota horizontal de equação $y = 13$. Isso significa que a altura da árvore vai crescendo e aproximando-se de 13 metros sem nunca alcançar essa altura. Desta forma nunca atingirá os 13,5 metros.

5. O gráfico refere-se à produção acumulada de batata. Então, no ano de 2021, foram produzidas um total de $49566 - 38972 = 10594$ toneladas.

Como se prevê uma redução de 15% na produção, só serão produzidas 85% das batatas de 2021.

Ora, $0,85 \times 10594 = 9004,9$ toneladas ≈ 9 milhares de toneladas

Resposta: É previsto para 2022 uma produção de, aproximadamente, 9 milhares de toneladas de batata.

6.

6.1. A função f é crescente, mas cresce mais rapidamente à medida que t se aproxima de 6 do que para valores iniciais, mais pertos de zero. Qualquer reta tangente à curva da função tem um declive que vai aumentado à medida que t se aproxima de 6.

Assim sendo, a taxa de variação instantânea de f é maior em $t = 5,5$ do que em $t = 0,5$

6.2. O depósito A não pode ser o existente, porque o seu enchimento seria mais lento na parte final e mais rápido no início, que é exatamente o contrário do que se verifica na função f .

O depósito B não pode ser o existente, porque o seu enchimento se daria sempre da mesma forma, o que se traduziria por uma função cujo gráfico fosse retilíneo, o que também não se verifica com a função f

7.

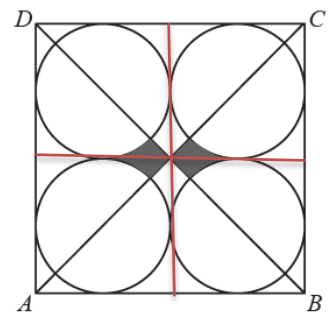
7.1. O lado do quadrado $[ABCD]$ mede 40 cm, correspondente a dois diâmetros de uma circunferência.

$$A_{[ABCD]} = 40^2$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = 1600$$

A área de cada círculo é $100\pi \text{ cm}^2$

A diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ e a área de quatro círculos é $1600 - 400\pi$.



Observando atentamente a figura, com o esquema introduzido, verifica-se que esta diferença corresponde à área de dezasseis regiões com área igual a cada uma das duas que estão sombreadas.

Assim, a área total sombreada é dada por:

$$A_T = \frac{1600 - 400\pi}{16} \times 2$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} \approx 43$$

Resposta: A área sombreada é, aproximadamente, 43 cm².

7.2. Analisemos os seguintes triângulos retângulos, semelhantes entre si, onde D é coincidente com a origem do referencial:

Das coordenadas do ponto P resulta

$$\overline{AP} = 40$$

$$\overline{DA} = 30$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo [APD], temos

$$\overline{DP} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$$

Como [PQ] corresponde ao raio de uma circunferência da figura 7, temos:

$$\overline{PQ} = 10 \text{ e, portanto,}$$

$$\overline{DQ} = 60$$

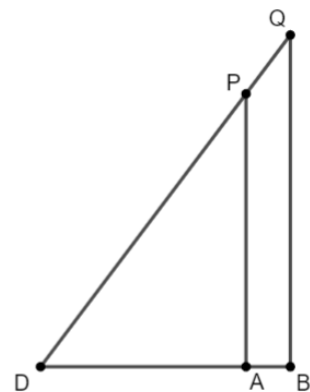
Por semelhança de triângulos temos

$$\frac{\overline{BD}}{30} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD} = 36$$

$$\frac{\overline{BQ}}{40} = \frac{60}{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BQ} = 48$$



Resposta: As coordenadas do ponto Q são (36,48).

8.

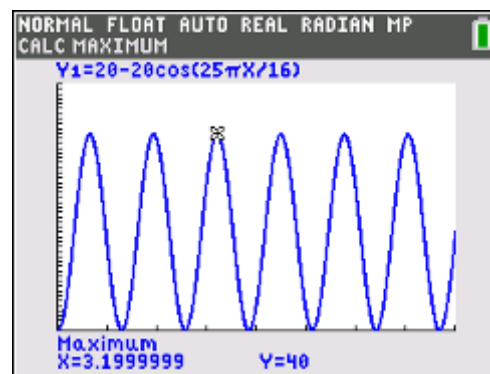
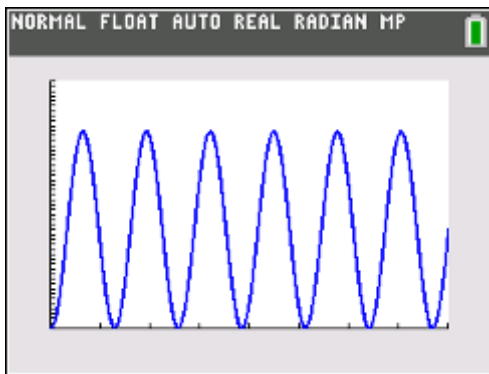
8.1. A diferença entre o máximo e o mínimo da função $a(t)$ dá-nos o diâmetro da roda pequena. Podemos determinar o máximo e o mínimo por dois processos:

1º processo: Utilizando um processo de construção por enquadramento, temos:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 1 \\ \Leftrightarrow -20 &\leq -20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 20 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \leq 40 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq a(t) \leq 40 \end{aligned}$$

2º processo: Utilizando a calculadora gráfica, determinamos o máximo da função, uma vez que o mínimo é, trivialmente, igual a 0, porque corresponde à altura do ponto A quando este se encontra no solo.

A função é periódica e podemos obter o seu máximo:



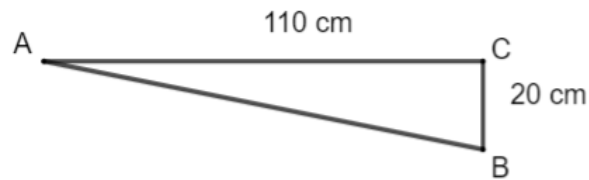
Como a função a varia entre 0 e 40, concluímos que o diâmetro da roda é 40 cm, pelo que o raio é 20 cm, como se queria demonstrar (c. q. d.).

8.2. Vejamos as posições dos pontos A e B , ao fim de 8 segundos:

$$\begin{aligned} a(8) &= 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16} \times 8\right) \\ \Leftrightarrow a(8) &= 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow a(8) &= 20 - 20\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow a(8) &= 20 - 0 \\ \Leftrightarrow a(8) &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(8) &= 62,5 - 62,5\cos\left(\frac{\pi}{2} \times 8\right) \\ \Leftrightarrow b(8) &= 62,5 - 62,5\cos(4\pi) \\ \Leftrightarrow b(8) &= 62,5 - 62,5 \times 1 \\ \Leftrightarrow b(8) &= 0 \end{aligned}$$

Ao fim de 8 segundos, o ponto A está a 20 cm de altura e à esquerda do centro da roda porque, para a bicicleta avançar, a roda gira no sentido dos ponteiros do relógio. O ponto B volta a estar no solo. Logo, os pontos A e B , são a hipotenusa de um triângulo retângulo com as dimensões, que constam da seguinte imagem, sendo a reta AC uma reta paralela ao chão, que contem o centro da roda menor.



Reparemos que, como o raio da roda é 20 cm e o ponto A está a 20 cm de altura, vamos ter que $\overline{AC} = 20 + 90 = 110$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, temos sucessivamente

$$\overline{AB}^2 = 110^2 + 20^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 12500$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 112$$

Resposta: A distância entre os pontos A e B , ao fim de 8 segundos é, aproximadamente, 112 cm.