

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
SECUNDÁRIO**

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 28 DE JUNHO DE 2023

1.

Tem-se que:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = (e^1)^2 = e^2.$$

Resposta correta: (C)

2.

Seja (u_n) a sucessão que dá o comprimento do n -ésimo segmento de reta da linha poligonal. Assim, u_1 é o comprimento do primeiro segmento de reta, isto é $u_1 = \overline{AB}$. Como cada segmento de reta, à exceção do primeiro, tem mais 2 cm do que o anterior, isto é, $u_{n+1} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$, vem que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

Além disso, prosseguindo a construção da linha até ao centésimo segmento de reta, obtém-se uma linha poligonal com 104 metros de comprimento, o que quer dizer que a soma dos 100 primeiros termos de (u_n) é 10400, dado que 104 metros correspondem a 10400 centímetros. Portanto:

$$S_{100} = 10400 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{100}}{2} \times 100 = 10400 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_1 + 99 \times 2}{2} = 104 \Leftrightarrow \frac{2u_1 + 198}{2} = 104 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underset{\times 2}{2u_1 + 198} = 104 \times 2 \Leftrightarrow 2u_1 = 208 - 198 \Leftrightarrow 2u_1 = 10 \Leftrightarrow u_1 = 5$$

Logo, o comprimento do segmento de reta $[AB]$ é 5 cm.

3.

Para estudar a função f quanto ao sentido das concavidades e ponto de inflexão do seu gráfico, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de f :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x)' e^{1-x^2} + (-2x)(1-x^2)' e^{1-x^2} = \\ &= -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = \\ &= -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = \\ &= e^{1-x^2}(4x^2 - 2) \end{aligned}$$

Determinemos agora os zeros da segunda derivada da função f :

$$\bullet f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2}}_{\text{Eq. impossível em } \mathbb{R}} = 0 \quad \vee \quad 4x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{4}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Elaborando um quadro de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f , vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	+	+	+	+	+
$4x^2 - 2$	+	0	-	0	+
f''	+	0	-	0	+
Gráfico de f	∪	p.i.	∩	p.i.	∪

Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e em $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1.

A função g é contínua em $x=1$ se, e só se, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$.

Começemos por calcular os limites laterais:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} = 4 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} \quad (\text{indeterminação do tipo } \frac{0}{0}).$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo: $y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$, tem-se que $x \rightarrow 1^-$ logo $y \rightarrow 0^-$

Assim,

$$4 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = 4 \times \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y-1} = 4 \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} = 4 \times \frac{1}{1} = 4$$

$$\text{pelo que: } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 4 \tag{1}$$

$$\bullet \quad g(1) = 7 \times 3^{1-1} - 3 = 4 \tag{2}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3) = 4. \tag{3}$$

Por (1), (2) e (3) conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$.

Logo, g é contínua em $x=1$.

4.2.

Começemos por notar que, para $x \in [1, +\infty[$, $x-1 \geq 0$, então $3^{x-1} \geq 1$ e portanto, $7 \times 3^{x-1} - 3 \geq 4$, isto é no intervalo $[1, +\infty[$ tem-se que $g(x) > 0$.

Seja então, $x \in [1, +\infty[$ tal que:

$$\begin{aligned} \log_3(g(x)) = x + \log_3(2) &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3 3^x + \log_3(2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x \times 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3^x \times 2 = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{3} \times 3^x - 3^x \times \frac{6}{3} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 3^x = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{-1} \times 3^x = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \in [1, +\infty[\end{aligned}$$

Assim, $C.S. = \{2\}$.

5.

5.1.

Considerando DAF _____

Calculando o número de grupos ordenados dos três jovens, temos $3!$ grupos. E por cada um destes grupos, existem $8!$ ordenações possíveis dos 10 jovens, correspondendo à ordenação dos restantes 7 jovens e de um destes grupos, considerando a ordem relevante. Assim, o número de formas diferentes de dispor os 10 jovens na fila é:

$$3! \times 8! = 241920.$$

Resposta correta: (B)

5.2.

Sejam os acontecimentos A : “Praticar surf” e B : “Praticar Skate”.

Sabemos que, $P(A) = 0,65$, $P(B \cap \bar{A}) = 0,20$ e $P(B|A) = \frac{4}{5}$, ou seja, $P(B|A) = 0,80$.

Como

$$P(B|A) = 0,8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0,8 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{0,65} = 0,8 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0,65 \times 0,8 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0,52$$

temos

	B	\bar{B}	Total
A	0,52	0,13	0,65
\bar{A}	0,20	0,15	0,35
Total	0,72	0,28	1

Assim,

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,13}{0,28} = \frac{13}{28}.$$

5.3.

Se n representar o número de jovens com 13 anos então, $70 - n$ representa o número de jovens com 14 anos.

Considerando o acontecimento X : “Selecionar dois jovens com idades distintas”, temos que: $P(X) = \frac{16}{35}$.

Número de casos possíveis é dado por ${}^{70}C_2$, ou seja, escolher 2 alunos de um grupo de 70.

Número de casos favoráveis é dado por exemplo ${}^nC_1 \times {}^{70-n}C_1$, ou seja, escolher 1 aluno de 13 anos e 1 aluno de 14 anos.

Logo,

$$\begin{aligned}P(X) = \frac{16}{35} &\Leftrightarrow \frac{{}^nC_1 \times {}^{70-n}C_1}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{n(70-n)}{{}^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow \frac{n(70-n)}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 35 \times (70n - n^2) = 16 \times 2415 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow 2450n - 35n^2 - 38640 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow n^2 - 70n + 1140 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow n = 24 \vee n = 46\end{aligned}$$

Como o número de jovens com 13 anos é inferior ao número de jovens com 14 anos, podemos concluir que neste grupo há 24 jovens com 13 anos.

6.

6.1.

As retas OD e AC são paralelas, pelo que, sendo $\vec{u}(0,4,3)$ um vetor diretor de AC , então \vec{u} é também vetor diretor de OD , assim como qualquer vetor colinear com este. Das opções apresentadas, apenas um dos vetores é colinear com \vec{u} , o vetor $\vec{v}\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, dado que $\vec{u} = 2\vec{v}$. Assim, eliminamos as opções **C** e **D**.

Das opções **A** e **B**, a única a que contém o ponto $O(0,0,0)$ é a opção **B**, dado que:

$$(0,0,0) = (0,-4,-3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 4 = 2k \\ 3 = \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Resposta correta: (B)

6.2.

O ponto C é o ponto de intersecção da reta AC com o plano BCE .

Como o ângulo ACB está inscrito numa semicircunferência, vem que $\widehat{ACE} = 90^\circ$, pelo que a reta AC é perpendicular ao plano BCE e, portanto, um vetor normal a BCE é $\vec{u}(0,4,3)$.

Logo, $BCE: 4y + 3z + d = 0$.

Como $E(0;12,5;0)$, dado que $\overline{OE} = 12,5$, vem que:

$$4 \times 12,5 + 3 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50 \Rightarrow BCE: 4y + 3z - 50 = 0$$

Sabendo que a equação da reta AC pode ser definida por: $(x,y,z) = (10,0,0) + k(0,4,3)$, $k \in \mathbb{R}$ então, um ponto genérico desta reta é do tipo $(10, 4k, 3k)$.

Substituindo este ponto genérico na equação do plano BCE , temos que k é:

$$4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow 16k + 9k = 50 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = 2$$

De onde se conclui que $C(10, 4 \times 2, 3 \times 2)$, ou seja, $C(10,8,6)$.

7.

Consideramos as coordenadas dos pontos P e Q em função de α .

Assim, temos que: $Q(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ e $P(2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$

Considerando os vetores $\overline{OQ}(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ e $\overline{OP}(2\cos\alpha, -2\sin\alpha)$ e sabendo que $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 3$, então:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = 3 \Leftrightarrow (2\cos\alpha, -2\sin\alpha) \cdot (2\cos\alpha, 2\sin\alpha) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cos(2\alpha) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

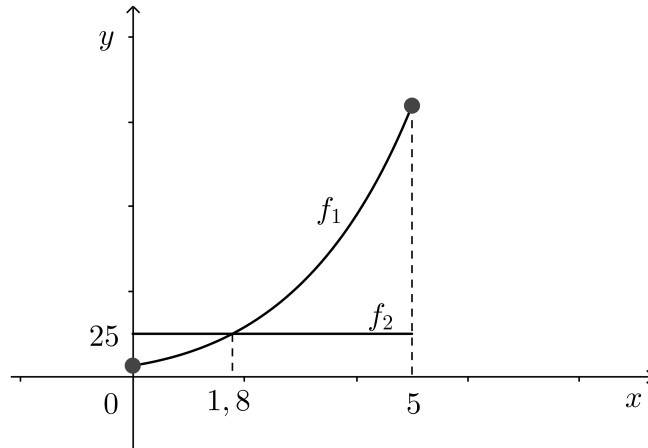
8.

A equação que permite resolver o problema é $a(t+3) - a(t) = 25$ (ou uma equivalente).

Considerando $f_1 = a(x+3) - a(x)$ e $f_2 = 25$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxílio da calculadora gráfica.

Como $t \in [0, 8]$ então, $t+3 \leq 8$ logo $t \leq 5$.

Assim, obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o instante a partir do qual, durante 3 segundos, o foguete percorre $25m$ é $1,8s$.

9.

(I) “O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$ ”.

A proposição é falsa pois, a afirmação “ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$ ” é equivalente à afirmação “a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f em $+\infty$ ”, pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

(II) “ $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$ ”.

Pelo facto de a função g ser diferenciável, podemos concluir que é contínua, em particular é contínua em $x = 1$, isto é, existe o $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Assim, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$.

Como a reta r é tangente ao gráfico de g , sabemos que a ordenada do ponto de abcissa 1 pode ser determinada a partir do cálculo: $2 \times 1 - 1 = 1$; isto é, $g(1) = 1 \neq 2$.

Logo a proposição é falsa.

(III) “ $f''(x) < g''(x), \forall x \in]0, +\infty[$ ”

A proposição é falsa pois sabemos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$ e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo, isto é, $\forall x \in]0, +\infty[, g''(x) \leq 0$ o que implica que $f''(x) \geq g''(x), \forall x \in]0, +\infty[$.

10.

Sabendo que:

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} \text{ pois } \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) \text{ e } \operatorname{Re}(z) > 0$$

$$\arg(w) = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8}$$

Logo

$$\arg(w \times z) = \arg(w) + \arg(z) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{8}$$

A opção correta é a C.

Resposta correta: (C)

11.

Simplifiquemos w :

$$w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i^{16} \times i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{i} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}i^2}{-i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Como $\left|-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ e, sendo $\arg(w) = \theta$, $\theta \in 2^\circ Q$ temos que:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}, \text{ pelo que } \arg(w) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}}, k \in \{0, 1\}$$

$$k = 0 \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1 \quad z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$R: \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad e \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

12.

12.1.

Tem-se que:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\operatorname{sen}(2x) + x)' = 2\cos(2x) + 1 = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = \\ &= 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) + 1 = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x + 1 = 3 - 4\operatorname{sen}^2 x\end{aligned}$$

Resposta correta: (D)

12.2.

Pretende-se mostrar que a equação $f(x) = -x + 2$ tem pelo menos uma solução em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$, ou seja:

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[: f(c) = -c + 2 \Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[: f(c) + c - 2 = 0$$

Seja g definida em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$ por $g(x) = f(x) + x - 2 = \operatorname{sen}(2x) + x + x - 2 = \operatorname{sen}(2x) + 2x - 2$

▪ g é contínua em $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$ pois resulta de operações elementares entre funções contínuas no seu domínio.

$$\bullet g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + 2 \times \frac{\pi}{6} - 2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 2 \approx -0,09 \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$$

$$\bullet g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) + 2 \times \frac{\pi}{3} - 2 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2 \approx 0,96 \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

Logo, como $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy:

$$\exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[: g(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[: f(c) + c - 2 = 0$$

Fica assim provado que o gráfico da função f e a reta r se intersectam pelo menos uma vez num ponto de abcissa pertencente a $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$.

13.

Seja P o ponto de tangência e x a sua abcissa.

Como P é ponto de tangência, temos $f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2a}$

e também

$$\begin{aligned} ax^2 + bx = ax + b &\Leftrightarrow ax^2 + (b-a)x - b = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(b-a) \pm \sqrt{(b-a)^2 + 4ab}}{2a} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{a-b \pm \sqrt{b^2 - 2ab + a^2 + 4ab}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{a-b \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{a-b \pm \sqrt{(a+b)^2}}{2a} \Leftrightarrow \\ &\left(\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| \right) \Leftrightarrow x = \frac{a-b \pm (a+b)}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{a-b+a+b}{2a} \vee x = \frac{a-b-a-b}{2a} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Se $x = 1$ então, $1 = \frac{a-b}{2a} \Leftrightarrow 2a = a-b \Leftrightarrow a = -b$.

Se $x = -\frac{b}{a}$ então, $-\frac{b}{a} = \frac{a-b}{2a} \Leftrightarrow -2b = a-b \Leftrightarrow a = -b$

Logo, substituindo a por $-b$ e x por 1 na equação da reta $y = ax + b$ obtemos:

$$y = a + b \Leftrightarrow y = -b + b \Leftrightarrow y = 0$$

Assim, as coordenadas do ponto de tangência são $(1, 0)$.