PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1.ª FASE – 26 DE JUNHO DE 2024

1.

O contradomínio da função f é $\left[-1, 3\right]$ e a função g é definida por $g(x) = f(x-2)+1$.

Tem-se que:

- $g_1(x) = f(x-2) \rightarrow$ corresponde a uma translação associada ao vetor $\vec{u}(2,0)$, ou seja, deslocamento horizontal de duas unidades para a direita, pelo que o contradomínio de g_1 é o mesmo do que o contradomínio de f;
- $g(x) = g_1(x)+1 = f(x-2)+1 \rightarrow$ corresponde a uma translação associada ao vetor $\vec{v}(0,1)$ (deslocamento vertical de uma unidade para cima), pelo que o contradomínio da função g é $\left[-1+1, 3+1\right] = \left[0,4\right]$.

Resposta correta: (C)

2.

2.1.

Considere-se os seguintes acontecimentos:

A: "Ser candidato a violinista" e *B:* "Ser candidato português".

Sabe-se que:

$$P(A) = \frac{3}{5},\quad P(B) = \frac{1}{2} \text{ e } P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right) = \frac{3}{10}$$

Desenvolvendo a probabilidade condicionada dada, temos que:

$$P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{10} \Leftrightarrow 1-P(A\cup B) = \frac{3}{20} \Leftrightarrow P(A\cup B) = \frac{17}{20}$$

Para se determinar $P(A\cap B)$, temos:

$$P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{17}{20} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{4}$$

Desta forma, a probabilidade de se selecionar um candidato ao acaso e esse ser português, sabendo-se que é violinista, é:

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{5}{12}.$$

2.2.

Sabendo que os três contrabaixistas se dispõem numa única fila; havendo só duas filas, há duas formas de se escolher a fila. ${}^4A_3$ Corresponde às diferentes formas de distribuir os três contrabaixistas pelos 4 lugares da fila escolhida. Quanto aos restantes músicos, estes permutam-se pelos lugares ainda existentes, ou seja, 5!. Assim, a expressão correspondente ao número de maneiras diferentes de dispor os oito músicos, ficando os três contrabaixistas numa fila é:

$$2 \times {}^4A_3 \times 5!$$

Resposta correta: (B)

2.3.

Como, em cada dia, excetuando-se o primeiro, a Constança praticou mais 10 minutos em relação ao dia anterior, pode-se recorrer a uma progressão aritmética de razão 10 $(r=10)$. Sendo que, os 60 minutos praticados no quarto dia correspondem ao quarto termo desta sucessão. Os 2970 minutos referentes ao total dos m dias corresponde à soma dos m primeiros termos desta progressão.

Assim, considera-se (u_n) a progressão aritmética cujos termos são referentes ao número de minutos praticados pela Constança por dia.

Sabe-se que:

$$u_4 = 60, \quad r = 10 \text{ e } S_m = 2970$$

De forma a obter o termo geral da progressão aritmética, temos:

$$u_n = u_4 + (n-4)\times 10 \Leftrightarrow u_n = 60 + 10n - 40 \Leftrightarrow u_n = 10n + 20$$

Para determinar a soma dos m primeiros termos da progressão, vem que: $u_1 = 10 \times 1 + 20 \Leftrightarrow u_1 = 30$.

Assim,

$$S_m = 2970 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_m}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow \frac{30 + 10m + 20}{2} \times m = 2970 \Leftrightarrow (25 + 5m)\times m = 2970 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 25m - 2970 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 594 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\times 1 \times (-594)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = -27 \vee m = 22$$

e como $m \in \mathbb{N}$ então, $m = 22$.

3.

3.1.

Como a reta BC é perpendicular ao plano ABF, tem-se que o vetor de coordenadas $(2, 3, 6)$ é normal ao plano ABF e assim, este pode ser dado por:

$$2x + 3y + 6z + d = 0,\ d \in \mathbb{R}$$

Substituindo o ponto $A(4, -4, -3)$ na equação considerada, obtém-se:

$$2 \times 4 + 3 \times (-4) + 6 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow d = 22$$

Tem-se assim que o plano ABF pode ser dado por:

$$2x + 3y + 6z + 22 = 0$$

Resposta correta: (A)

3.2.

Sabe-se que qualquer ponto da reta BC é da forma $(3 + 2k,\ 5 + 3k,\ 1 + 6k),\ k \in \mathbb{R}$ e como o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa, temos:

$$5 + 3k = 2 \times (3 + 2k) \Leftrightarrow 5 + 3k = 6 + 4k \Leftrightarrow k = -1$$

Assim, $B(3 - 2,\ 5 - 3,\ 1 - 6) = (1,\ 2,\ -5)$, pelo que $\overrightarrow{OA}(4, -4, -3)$ e $\overrightarrow{OB}(1, 2, -5)$

Então,

$$\cos(A\hat{O}B) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{4 \times 1 - 4 \times 2 - 3 \times (-5)}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-3)^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{11}{\sqrt{41} \times \sqrt{30}} = \frac{11}{\sqrt{1230}}$$

Logo,

$$A\hat{O}B = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{1230}}\right) \approx 72^{\circ}$$

3.3.

Como o número de casos possíveis é ${}^4C_2 \times {}^4C_2 = 36$ e o número de casos favoráveis é ${}^4C_2 \times {}^4C_2 - 4 = 32$, então aplicando a regra de Laplace, a probabilidade pedida, p, é dada por:

$$p = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

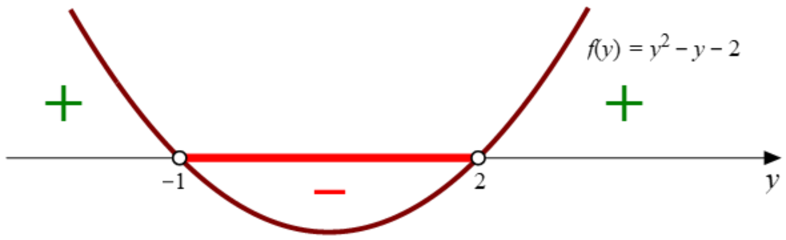
4.

O domínio de validade da condição é $D=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=\mathbb{R}^+$.

Fazendo $y=\ln x$, a inequação fica, $y^2-y-2<0$.

Determinando os zeros: $y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow y=-1 \ \vee\ y=2$

Esboçando o gráfico da função quadrática f, definida por $f(y)=y^2-y-2$:



Portanto,

$$y^2-y-2<0 \Leftrightarrow y>-1 \ \wedge\ y<2 \underset{y=\ln x}{\Leftrightarrow} \ln x>-1 \ \wedge\ \ln x<2 \underset{\substack{-1=\ln e^{-1}\\ 2=\ln e^2}}{\Leftrightarrow} \ln x>\ln e^{-1} \ \wedge\ \ln x<\ln e^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{e} \ \wedge\ x<e^2$$

Intersectando com o domínio (figura não à escala):

Portanto, o conjunto solução da condição é $\mathbb{R}^+\cap\left(\left]\frac{1}{e},e^2\right[\right)=\left]\frac{1}{e},e^2\right[$.

5.

5.1.

Para estudar a função g quanto à monotonia, determinemos a expressão analítica da primeira derivada de g no intervalo $]1,+\infty[$:

$$g'(x)=\left(x^2-3x-2\ln x\right)' =$$
$$= 2x-3-2\times\frac{1}{x} =$$
$$=\frac{2x^2-3x-2}{x}$$

Calculando os zeros da função derivada, no intervalo $]1,+\infty[$, vem:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-2}{x}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0 \wedge x\neq 0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \ \vee \ x=2$$

pelo que, 2 é a única solução neste intervalo.

Estudando a variação do sinal da função derivada, em $]1,+\infty[$, e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	1		2	$+\infty$
$2x^2-3x-2$	n. d.	-	0	+
x	n. d.	+	+	+
g'	n. d.	-	0	+
g	n. d.	↘	Min.	↗

Assim, podemos concluir que o valor mínimo da função g é atingido quando $x=2$, ou seja, $g(2)=\left(2^2-3\times 2-2\ln 2\right)=4-6-\ln 2^2=-2-\ln 4$.

A função é monótona decrescente em $]1\,,\,2]$, monótona crescente em $[\,2\,,+\infty[$ e tem um mínimo igual a $-2-\ln 4$.

5.2.

A função g é contínua em $x=1$ se $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$.

Assim, estudemos:

- $g(1) = 1^2 - 3\times 1 - 2\ln(1) = 1-3-2\times 0 = -2$
- $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2 - 3x - 2\ln x\right) = 1^2 - 3\times 1 - 2\ln(1) = 1-3-2\times 0 = -2$
- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1-x}{e^{x-1}-1} - e^{x-k}\right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{e^{x-1}-1} - \lim_{x\to 1^-} e^{x-k} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{e^{x-1}-1} - e^{1-k} =$

$$\underset{\substack{y=x-1\\ x\to 1^- \Rightarrow y\to 0^-}}{=} -\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{e^y-1} - e^{1-k} = -\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}} - e^{1-k} = -\frac{1}{1} - e^{1-k} = -1 - e^{1-k}$$

Logo, $-1-e^{1-k} = -2 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -2+1 \Leftrightarrow -e^{1-k} = -1 \Leftrightarrow e^{1-k} = 1 \Leftrightarrow 1-k = \ln 1 \Leftrightarrow 1-k = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

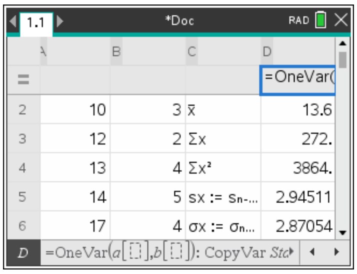
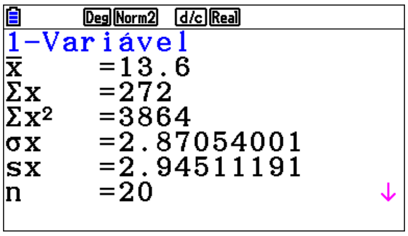
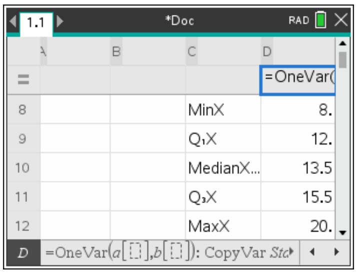
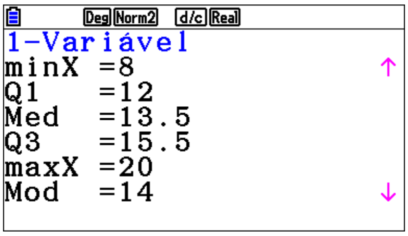
6.

A percentagem de alunos com classificação interior a 13 é $5+15+10=30\%$. Portanto, $0{,}30\times 20 = 6$ alunos tiveram classificação inferior a 13, pelo que **I** $\to$ **b)**.

Introduzindo os dados numa calculadora, vamos determinar a mediana, a média e o desvio-padrão. Podemos, primeiro, construir uma tabela de frequências absolutas:

Classificações	Frequência Relativa	Frequência Absoluta
8	5%	$0{,}05\times 20 = 1$
10	15%	$0{,}15\times 20 = 3$
12	10%	$0{,}10\times 20 = 2$
13	20%	$0{,}20\times 20 = 4$
14	25%	$0{,}25\times 20 = 5$
17	20%	$0{,}20\times 20 = 4$
20	5%	$0{,}05\times 20 = 1$

Assim, a mediana é $13{,}5$, a média é $13{,}6$ e o desvio-padrão é, aproximadamente, $2{,}9$. Na tabela seguinte apresentam-se os valores obtidos com as diferentes calculadoras:

TI-Nsipe CX II-T	CASIO FX-CG50	NUMWORKS
		
		

Portanto, **I** $\to$ **b), II** $\to$ **c)**, **III** $\to$ **b)** e **IV** $\to$ **a)**.

7.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como a função f é o quociente entre duas e funções contínuas em $\mathbb{R}$, a função é contínua no seu domínio, logo a única candidata a assíntota vertical é a reta de equação $x = 0$.

Estudemos a existência de assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x^4(1+\cos x)} = \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to0} \frac{1}{1+\cos x} = 1 \times 1 \times \frac{1}{0^+} \times \frac{1}{1+\cos 0} = +\infty \times \frac{1}{2} = +\infty$$

Assim, $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$, pelo que a única assíntota vertical ao gráfico da função f é a reta de equação $x = 0$.

8.

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a),\ a \neq 2$ → a função é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$ com $f(2) > 0$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

$f(x) \times f(3) < 0$

I) A função não é contínua para $x = 2$, uma vez que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, logo não é possível recorrer ao Teorema de Bolzano-Cauchy pois a função não é contínua em $[1, 3]$ (não é contínua em $x = 2$ que pertence ao intervalo). Assim, apesar de $f(1) \times f(3) < 0$, não podemos garantir que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]1, 3[$, pelo que a afirmação é falsa.

II) Para que a reta de equação $x = 2$ seja assíntota vertical ao gráfico da função $\frac{1}{f}$ é necessário que:

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \pm\infty$, o que não se verifica pois:

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$ (número real)

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(2)}$, como $f(2) > 0$, número real positivo, logo este limite não é infinito, pois também será um número real positivo.

Como nenhum dos limites é infinito, a afirmação é falsa.

9.

A área do sector circular de raio 2 é dada por: $\frac{\alpha\times 2^2}{2} = 2\alpha$.

Observando que que:

$A\,(2, 0)$, $B(2\cos\alpha, 2\,sen\,\alpha)$, $C\,(-2\cos\alpha, 2\,sen\,\alpha)$, $D\,(-2\cos\alpha, 0)$

A área do trapézio $[OBCD]$ é dada por:

$$\frac{\overline{OD} + \overline{CB}}{2} \times \overline{CD} = \frac{2\cos\alpha + 2(2\cos\alpha)}{2} \times 2\,sen\,\alpha = (\cos\alpha + 2\cos\alpha) \times 2\,sen\,\alpha$$

$$= 2\cos\alpha\,sen\,\alpha + 2\,(2\cos\alpha\,sen\,\alpha) =$$

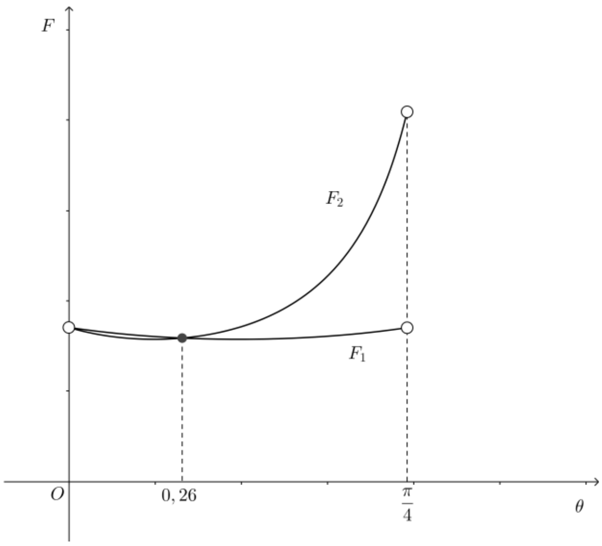
$$= sen\,(2\alpha) + 2\,sen\,(2\alpha) = 3\,sen\,(2\alpha)$$

A área sombreada resulta da soma destas duas áreas ou seja $2\alpha + 3\,sen\,(2\alpha)$, como queríamos mostrar.

10.

A equação que permite resolver o problema é $F(\theta) = F(2\theta)$ (ou uma equivalente).
Assim, considerando $F_1 = F(\theta)$ e $F_2 = F(2\theta)$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxílio da calculadora gráfica.

Como $\theta \epsilon \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o valor de θ, solução deste problema, em radianos e arredondado às centésimas, é $0{,}26$.

11.

Como o ponto A pertence ao semieixo imaginário negativo e à circunferência de raio 2 centrada na origem, então corresponde ao número complexo $z_A = -2i$.
Como este número complexo é uma raiz cúbica de w, então ${z_A}^3 = w$.
Logo,

$${z_A}^3 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Resposta correta: (C)

12.

$$z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{i^3 \times i^4} = \frac{4-4i}{1+1} - \frac{2}{i^3} = \frac{4-4i}{2} - \frac{2}{-i} = 2 - 2i - \frac{2i}{1} = 2 - 2i - 2i =$$
$$= 2 - 4i$$

C.A.

$i^7 = i^3 \times i^4 = i^3 = i \times i^2 = -i$

Seja $w = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$.

Calculemos, na forma algébrica, o complexo zw.

Ora, como o afixo de zw pertence à bissetriz do terceiro quadrante, temos que

$Re(zw) = Im(zw)$, com $Re(zw) < 0$ e $Im(zw) < 0$.

Assim,

$zw=(2-4i).(a+bi)=2a+2bi-4ai-4bi^2=(2a+4b)+(2b-4a)i$

Como $Re(zw)=Im(zw) \Leftrightarrow \; 2a+4b=2b-4a \Leftrightarrow 6a=-2b \Leftrightarrow b=-3a$

Donde,

$zw=(2-4i).(a+bi)=(2a+4b)+(2b-4a)i=(2a-12a)+(-6a-4a)i=-10a-10a\,i.$

Por outro lado,

$|zw|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(-10a)^2+(-10a)^2}=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{100a^2+100a^2}=5\sqrt{2} \; \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 200a^2=25\times 2 \Leftrightarrow a^2=\frac{50}{200} \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2} \;\vee\; a=-\frac{1}{2}$$

Para $a=\frac{1}{2}$, temos $b=-\frac{3}{2}$

$$(2-4i).\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)=1-3i-2i+6i^2=1-6-5i=-5-5i \quad \in 3^{\text{º}}Q$$

Para $a=-\frac{1}{2}$, temos $b=\frac{3}{2}$

$$(2-4i).\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)=-1+3i+2i-6i^2=-1+6+5i=5+5i \quad \in 1^{\text{º}}Q.$$

Como o afixo do complexo w pertence à bissetriz do 3º quadrante, temos que:

$$w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

Resolução alternativa:

$$z=\frac{4}{1+i}-\frac{2}{i^7} \underset{i^7=i^3=-i}{=} \frac{4}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}-\frac{2}{-i}=\frac{4-4i}{1^2-i^2}+\frac{2}{i}\times\frac{-i}{-i}=\frac{4-4i}{2}-\frac{2i}{-i^2}=2-2i-2i=2-4i$$

Como o afixo de $z\times w$ pertence à bissetriz do terceiro quadrante, um seu argumento é $\frac{5\pi}{4}$. Assim, como o seu módulo é $5\sqrt{2}$, vem que:

$$z\times w=5\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}=5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-5-5i$$

Logo,

$$z\times w=-5-5i \Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{z} \Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{2-4i} \Leftrightarrow w=\frac{-5-5i}{2-4i}\times\frac{2+4i}{2+4i} \Leftrightarrow w=\frac{-10-20i-10i-20i^2}{2^2-4^2i^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w=\frac{-10-30i+20}{4+16} \Leftrightarrow w=\frac{10-30i}{20} \Leftrightarrow w=\frac{10}{20}-\frac{30i}{20} \Leftrightarrow w=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$$

13.

$y = mx + 1$; $f(x) = 2x^2 + bx + 5$

Seja a a abcissa do ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é a reta de equação $y = mx + 1$.

Assim, $f'(a) = m$.

Ora, $f'(x) = 4x + b$ e, consequentemente, $f'(a) = 4a + b$.

$$4a + b = m \qquad (1)$$

Por outro lado, e pelo facto de o ponto pertencer ao gráfico e à reta,

$f(a) = 2a^2 + ba + 5$ e $f(a) = ma + 1$

$$2a^2 + ba + 5 = ma + 1 \qquad (2)$$

Assim, de (1) e de (2), resulta,

$2a^2 + ba + 5 = (4a + b)a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a^2 + ba + 5 - ab - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \ .$$

Como, por hipótese, $a > 0$, concluímos que $a = \sqrt{2}$.