PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 2.ª FASE – 22 DE JULHO DE 2024

1.

1.1.

Como a reta que passa no ponto A é paralela à reta FC sabe-se que as retas têm a mesma direção, ou seja, os vetores diretores destas são colineares.

Na opção A não existe nenhum k de tal modo que $(1,-5,0) = k(-5,-1,7)$ e na opção B também não existe nenhum k de tal modo que $(-1,5,0) = k(-5,-1,7)$.

Neste sentido, das quatro opções, só as opções C e D apresentam vetores diretores colineares ao da reta FC, considerando $k = -1$.

Verifiquemos qual destas retas contém o ponto A.

Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy e $\overline{OA} = 4$, temos o ponto A com as coordenadas: $(0,4,0)$.

Atendendo à equação vetorial da opção C, sabe-se que os pontos desta reta têm as coordenadas da forma:

$$(-10+5k, 2+k, 14-7k\ ), k \in \mathbb{R}$$

Assim, verifiquemos se existe algum valor k que devolva as coordenadas do ponto A:

$$(0,4,0) = (-10+5k, 2+k, 14-7k\ ) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -10+5k \\ 4 = 2+k \\ 0 = 14-7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

Como existe um valor de k que verifica a condição, podemos concluir que o ponto A pertence a esta reta.

Resposta correta: (C)

1.2.

Atendendo aos dados do enunciado, sabe-se que:

$$A(0,4,0)\,,\quad F(x,y,0)\quad \text{e}\quad C(0,y,z)$$

Para que a superfície esférica contenha todos os vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ o centro desta será no ponto médio do segmento de reta $[FC]$ e o valor do diâmetro é igual ao seu comprimento, $\overline{FC}$.

Comecemos por determinar as coordenadas dos pontos F e C.

Sendo $(x,y,z)=(-5,2,14)+k(-5,-1,7), k\in\mathbb{R}$ a equação vetorial da reta FC, temos os pontos F e C com as suas coordenadas na forma:

$$(-5-5k, 2-k, 14-7k\ ),\qquad k\in\mathbb{R}$$

Determinemos as coordenadas do ponto F:

$$(x,y,0)=(-5-5k,2-k,14-7k\ )\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-5k\\ y=2-k\\ 0=14+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5-5(-2)\\ y=2-(-2)\\ k=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\ y=4\\ k=-2\end{cases}$$

Assim, as coordenadas do ponto F são: $(5,4,0)$.

Passemos a determinar as coordenadas do ponto C:

$$(0,y,z)=(-5-5k,2-k,14-7k\ )\Leftrightarrow\begin{cases}0=-5-5k\\ y=2-k\\ z=14+7k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\ y=3\\ z=7\end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são: $(0,3,7)$.

Sendo o centro da superfície esférica o ponto médio de $[FC]$, temos:

$$\left(\frac{0+5}{2},\frac{3+4}{2},\frac{7+0}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$$

Relativamente ao raio da superfície esférica, temos:

$$\frac{d(C,F)}{2}=\frac{\sqrt{(0-5)^2+(3-4)^2+(7-0)^2}}{2}=\frac{\sqrt{75}}{2}$$

Desta forma, a equação cartesiana reduzida é: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{75}{4}$

2.

Segundo o enunciado, sabemos que:

$$u_1 + u_5 = 26 \quad \text{e} \quad u_9 = 31$$

Tratando-se de uma progressão aritmética conseguimos determinar, através da resolução do seguinte sistema, o valor do primeiro termo, u_1, e da razão, r.

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 26 \\ u_9 = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4r = 26 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2r = 13 \\ u_1 + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2r \\ 13 - 2r + 8r = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2r \\ 6r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 2 \times 3 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ r = 3 \end{cases}$$

Assim, determinemos o termo geral de (u_n):

$$u_n = 7 + (n-1) \times 3 \Leftrightarrow u_n = 3n + 4$$

Para verificar se 835 é termo de (u_n), façamos:

$$u_n = 835 \Leftrightarrow 3n + 4 = 835 \Leftrightarrow 3n = 831 \Leftrightarrow n = \frac{831}{3} \Leftrightarrow n = 277$$

Como a solução da equação é um número natural podemos concluir que 835 é o termo de ordem 277.

3.

A área do trapézio é dada por:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB}$$

Tem-se que:

$$A(a, 0), \qquad B(a+4, 0), \qquad C\big(a+4, log_{2a}(a+4)\big), \qquad D(a, log_{2a}a)$$

E assim sendo,

$$\overline{AD} = y_D - y_A = log_{2a}a; \ \overline{BC} = y_C - y_B = log_{2a}(a+4); \ \overline{AB} = x_B - x_A = a + 4 - a = 4$$

Logo,

$$A_{[ABCD]} = \frac{log_{2a}a + log_{2a}(a+4)}{2} \times 4 = 2log_{2a}(a^2 + 4a)$$

Igualando a 4, como pretendido no enunciado:

$$2log_{2a}(a^2 + 4a) = 4 \Leftrightarrow log_{2a}(a^2 + 4a) = 2 \underset{(a>1)}{\Longleftrightarrow} a^2 + 4a = (2a)^2 \Leftrightarrow a^2 + 4a = 4a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a.(-3a + 4) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{4}{3}$$

Donde se conclui que $a = \frac{4}{3}$, pois $a > 1$.

4.

Introduzindo os dados numa calculadora, obtém-se:

Mediana da remuneração média mensal dos homens: $904{,}6$

Amplitude interquartil da remuneração média mensal dos homens: $990{,}1 - 674{,}7 = 315{,}4$

Em 2015, a remuneração base média mensal das mulheres é de 825, e em 2020, é de 960,3, aumentando, $135{,}3$, isto é, há um aumento percentual de $16{,}4\%$ $\left(= \frac{960{,}3-825}{825} \times 100\right)$

O coeficiente de correlação linear das variáveis x e y, arredondado às milésimas é 0,998.

Sendo assim, em I, a opção é c); em II, a opção é a); em III, a opção é b); e, em IV, a opção é c).

5.

Tem-se que $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QP} = 27$, e como o triângulo $[PQR]$ é retângulo, com ângulo reto em R, logo

$$\|\overrightarrow{QR}\| \times \|\overrightarrow{QP}\| \times cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 27$$

Como o raio da circunferência é 3 (o diâmetro é 6) e $cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sen\,\alpha$, obtém-se:

$$\|\overrightarrow{QR}\| \times 6 \times sen\,\alpha = 27 \Leftrightarrow$$

$$sen\,\alpha = \frac{27}{6 \times \|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{9}{2 \times \|\overrightarrow{QR}\|} \quad (I)$$

Sendo $[PQR]$ um triângulo retângulo, tem-se que:

$$sen\,\alpha = \frac{\|\overrightarrow{QR}\|}{6} \quad (II)$$

Igualando (I) e (II), obtém.se:

$$\frac{9}{2 \times \|\overrightarrow{QR}\|} = \frac{\|\overrightarrow{QR}\|}{6} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{QR}\|^2 = 27 \underset{(\|\overrightarrow{QR}\|>0)}{\Longleftrightarrow} \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{27}$$

Tomando (II), tem-se que:

$$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{27}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclui-se que como α é um ângulo agudo então $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

6.

6.1.

A reta de equação $y = 3x - 5$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$.

Logo temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x) - (3x - 5)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(g(x) - 3x + 5) = 0$$

Resposta correta: (D)

6.2.

Como a função g é contínua em $x = 0$, temos que:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$$

Assim:

$g(0) = f(0) = 2$

Como f é contínua em $[0, +\infty\, [$, logo é contínua em $x = 0$

Temos então que.

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

Temos também que:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{-x^2 + 2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}(e^x - 1)}{x(-x + 2)} = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{(limite\ notável)} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-k}}{-x + 2} =$$

$$= 1 \times \frac{e^{-k}}{2} = \frac{e^{-k}}{2}$$

Para g ser contínua em $x = 0$ então:

$\frac{e^{-k}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{-k} = 4 \Leftrightarrow -k = ln\, 4 \Leftrightarrow k = -\, ln\, 4$ (ou equivalente)

7.

7.1.

O número de casos possíveis é 6^3.

Para contar os casos favoráveis importa observar os múltiplos de 3 nas duas faces voltadas para cima podem ser ambos 3, ambos 6 (${}^{3}C_2 \times 2$ casos) ou um 6 e um 3 (${}^{3}A_2$ casos), ficando 4 possibilidades para a outra face, 1, 2, 4 ou 5.

Assim, o número de casos favoráveis pode ser dado por $\left({}^{3}C_2 \times 2 + {}^{3}A_2\right) \times 4$

Deste modo, o valor da probabilidade pedida é $\frac{\left({}^{3}C_2 \times 2 + {}^{3}A_2\right) \times 4}{6^3} = \frac{48}{196} = \frac{2}{9}$

Resposta correta: (D)

7.2.

Para que o número de 6 algarismos seja inferior a 300000, o algarismo das centenas de milhar poderá ser 1 ou 2. Por outro lado, o algarismo das unidades poderá ser 2, 4 ou 6, uma vez que o número é par, mas 2 e 4 terão de estar juntos.

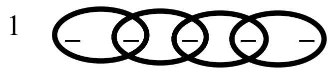
Uma vez que os algarismos do número são todos diferentes, considerem-se as duas situações relativas ao algarismo inicial:

Contabilização dos números que começam em 2:

Nesta situação, 4 tem de ser o algarismo seguinte e 6 será o algarismo das unidades, havendo 3 lugares para colocar os algarismos ímpares, por qualquer ordem. Há portanto 3! números que começam por 2.

Contabilização dos números que começam em 1:

Nesta situação, os algarismos 2 e 4 poderão, em par, em 4 posições diferentes, conforme se observa no esquema da figura.



Quando o par ocupa as unidades e as dezenas, o número pode terminar em 24 ou 42 e os restantes algarismos, 3, 4 e 6 podem ocupar os outros 3 lugares, por qualquer ordem. Há, assim, $1 \times 3! \times 2$ números destes.

Quando nenhum dos algarismos 2 ou 4 ocupa o lugar das unidades, este será ocupado pelo algarismo 6. Neste caso, o número começa por 1 e termina em 6. Há 3 lugares para o par formado pelos algarismos 2 e 4, os quais podem estar dispostos por duas ordens distintas. Restam 2 lugares para os algarismos 3 e 5, os quais podem estar dispostos por duas ordens distintas também. Por isso, há $3 \times 2 \times 2$ números destes.

Assim, a quantidade de números nas condições enunciadas pode ser dada por $3! + 1 \times 3! \times 2 + 3 \times 2 \times 2$, ou seja, 30.

8.

De $P(\bar{A}) = 3P(B)$ e do facto de $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, vem que $P(A) = 1 - 3P(B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 1 + 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B)$.

Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e porque $P(B) = 4P(A \cap B)$, vem que:

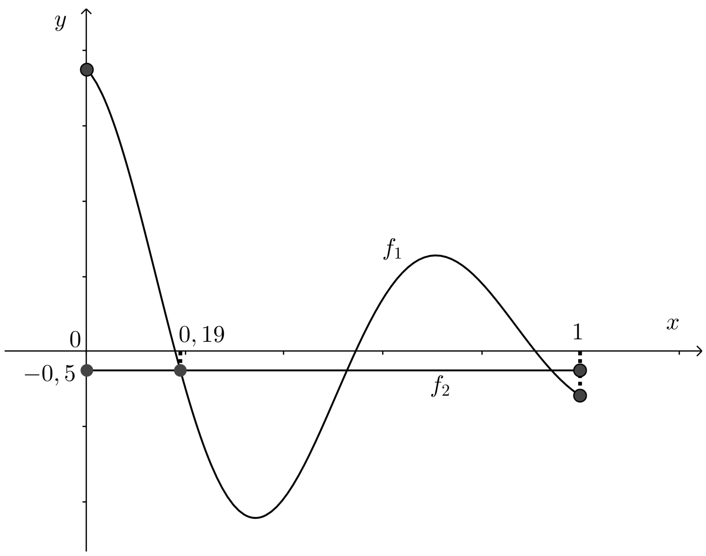
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{4P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$$

9.

A equação que permite resolver o problema é $y(t) = -0{,}5$ (ou uma equivalente).

Assim, considerando $f_1: y(t) = 7{,}5\, e^{-1{,}5t} sen\,(8{,}6t + 1{,}6)$ e $f_2: y = -0{,}5$, determinamos o ponto de interseção dos gráficos das duas funções com o auxílio da calculadora gráfica.

Como $t \epsilon [0{,}1]$ obtemos a seguinte representação gráfica:



Logo o valor de t, solução deste problema, em segundos e arredondado às centésimas é $0{,}19\ s$.

10.

(I) **"***O gráfico da função f pode ter a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$".*

A proposição é falsa pois, a afirmação " a função f', derivada da função f, é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$ ", é equivalente a "$f''(x) \geq 0, \forall x \in]0, +\infty[$ ", ou seja, o gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$.

(II) **"***No intervalo]1, 5[, a função f tem, pelo menos, um extremo*".

A proposição é falsa pois, pelo facto de a função f ser diferenciável e f' ser crescente e $f'(1) = 2$, podemos concluir que f' não tem zeros em]1, 5[, logo a função f não tem extremos nesse intervalo.

11.

11.1.

A reta s é paralela à reta r, logo as retas r e s têm o mesmo declive ($m_s = m_r$).

E como $m_r = g'(0) = cos 0 + 2 sen 0 = 1$, pois a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, concluímos que:

$$s: y = x + b$$

Além disso, sabemos que a reta s intersecta Ox no ponto de abcissa 4,

logo temos que $0 = 4 + b \Leftrightarrow b = -4$

Concluímos, assim, que a equação da reta s é $y = x - 4$

11.2.

Para estudar a função g quanto ao sentido das concavidades e ponto de inflexão do seu gráfico, determinemos a expressão analítica da segunda derivada de g:

$$g''(x) = -2sen(2x) + 2cosx = -2(2senxcosx) + 2cosx = 2cosx(-2senx + 1)$$

Determinemos agora os zeros da segunda derivada da função

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2cosx(-2senx + 1) = 0 \Leftrightarrow cosx = 0 \vee senx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \, , k \in \mathbb{Z}$$

$x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, logo tem-se $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Elaborando um quadro de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2cosx$	n.d.	+	+	+	n.d.
$-2senx + 1$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
gráfico de g	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$	n.d.

Logo, o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$, concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ e tem ponto de inflexão em $x = \frac{\pi}{6}$.

12.

$$z = -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

O número complexo que tem como afixo o transformado do ponto A, afixo do número complexo z, por uma rotação de centro na origem e de ângulo orientado de amplitude $\frac{\pi}{3}$ obtém -se através do produto:

$$\left(2e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\left(1e^{\frac{\pi}{3}}\right) = (2 \times 1)e^{-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}} = 2e^{-\frac{\pi}{6}} = 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2isen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2}i = \sqrt{3} - i$$

Resposta correta: (A)

13.

$$w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}=\frac{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}}=\left(\frac{2}{1}\right)e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\left(\frac{25\pi}{12}\right)}=2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

C.A. $-1-\sqrt{3}i=2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$ pois :

$$\left|-1-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2$$

$\theta=\arg(-1-\sqrt{3}i)$: $tg\theta=\frac{-\sqrt{3}}{-1}=\sqrt{3}$ $\wedge$ $\theta\in 3^{\text{º}}Q$, logo $\theta=\frac{4\pi}{3}$

Como w é uma das raízes sextas de z, então:

$$z=w^6\Leftrightarrow z=\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^6\Leftrightarrow z=2^6e^{i\left(\frac{6\pi}{12}\right)}\Leftrightarrow z=64e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\Leftrightarrow z=64i$$

Donde, $iz=(64i)i=-64$

14.

Por definição $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

E consequentemente, $f'(-a)=\lim\limits_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}$

Como por hipótese, f é par, temos que $f(a)=f(-a)$.

Assim,

$$f'(-a)=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to -a}\frac{f(x)-f(a)}{x+a}\underbrace{=}_{1}\lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(a)}{-y+a}=\lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(a)}{-(y-a)}=$$

$$=-\lim_{y\to a}\frac{f(-y)-f(a)}{y-a}\underbrace{=}_{2}-\lim_{y\to a}\frac{f(y)-f(a)}{y-a}=-f'(a)$$

1_ Mudança de Variável $y=-x$; $x\to -a; y\to a$

2_ A função f é par

Isto é, $f'(-a)=-f'(a)$ e , como por hipótese, $f(a)=f'(a)$, podemos concluir que:

$$f'(-a)=-f(a)$$

Assim,

$$f'(-a)\times f'(a)=-f(a)\times f(a)=-\left[\left(f(a)\right)\right]^2{}_{C.Q.D.}$$